

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

**CONTROLE DE VIBRAÇÃO POR DISPOSITIVOS DE MATERIAL
VISCOELÁSTICO CARACTERIZADO VIA INFERÊNCIA BAYESIANA**

CURITIBA - PR

2019

CÍNTIA TEIXEIRA PRÉVE

**CONTROLE DE VIBRAÇÃO POR DISPOSITIVOS DE MATERIAL
VISCOELÁSTICO CARACTERIZADO VIA INFERÊNCIA BAYESIANA**

Tese aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutora em Engenharia Mecânica pelo Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Eduardo Márcio de Oliveira
Lopes, PhD

Coorientador: Paulo Justiniano Ribeiro Junior,
PhD

CURITIBA - PR

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

P944c Préve, Cíntia Teixeira
 Controle de vibração por dispositivos de material viscoelástico
 caracterizado via inferência bayesiana [recurso eletrônico] / Cíntia
 Teixeira Préve – Curitiba, 2019.

 Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,
 Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
 Orientador: Eduardo Márcio de Oliveira Lopes
 Coorientador: Paulo Justiniano Ribeiro Junior

 1. Materiais viscoelásticos . 2. Teoria bayesiana de decisão
 estatística. 3. Vibração. I. Universidade Federal do Paraná. II.
 Lopes, Eduardo Márcio de Oliveira. III. Ribeiro Junior, Paulo
 Justiniano. IV. Título.

CDD: 620.11232

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **CINTIA TEIXEIRA PREVE** intitulada: **CONTROLE DE VIBRAÇÃO POR DISPOSITIVOS DE MATERIAL VISCOELÁSTICO CARACTERIZADO VIA INFERÊNCIA BAYESIANA**, sob orientação do Prof. Dr. EDUARDO MARCIO DE OLIVEIRA LOPES, que após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 02 de Setembro de 2019.



EDUARDO MARCIO DE OLIVEIRA LOPES

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



WAGNER HUGO BONAT

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



CARLOS ALBERTO BAVASTRI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



MARCO ANTONIO LUERSEN

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Viver é enfrentar um problema atrás do outro.
O modo como você o encara é que faz a diferença.

Benjamin Franklin

RESUMO

Sistemas mecânicos de interesse podem estar sujeitos a vibrações e ruídos indesejados. Para atenuação de vibrações e ruídos excessivos, destacam-se os materiais viscoelásticos, face à sua eficácia nas ações de controle. Uma forma bem estabelecida para descrever o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, em amplas faixas de frequência e temperatura, tem sido a representação por módulos complexos. Esse comportamento é descrito pelo modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros, auxiliado pelas equações WLF ou de Arrhenius. Frente à significativa dispersão nos dados experimentais relativos a materiais viscoelásticos, busca-se descrever suas propriedades dinâmicas empregando métodos probabilísticos. Destaca-se, em particular, o uso da inferência bayesiana, em que se obtêm distribuições de probabilidade para os parâmetros dos modelos. No presente trabalho, emprega-se a utilização de um material viscoelástico modelado probabilisticamente, através da abordagem de inferência bayesiana, em um projeto de isolamento de vibrações e em um projeto de neutralização de vibrações. São descritas a caracterização dinâmica pertinente do material e as formulações matemáticas tanto do problema de isolamento quanto do de neutralização. Como resultados, são expostas, no isolamento, as curvas de transmissibilidade para cada conjunto de valores dos parâmetros do material viscoelástico caracterizado por inferência bayesiana. Na neutralização, mostra-se a frequência ótima do neutralizador que fornece a menor redução de vibração. Além disso, são apresentados os diferentes valores do fator de projeto dos isoladores e dos neutralizadores, junto com as dimensões decorrentes desses valores. Constata-se que a abordagem probabilística permite uma melhor compreensão dos resultados associados ao uso de materiais viscoelásticos no controle de vibrações.

Palavras-chave: Controle de Vibrações; Inferência bayesiana; Isolamento de vibrações; Material viscoelástico; Neutralizador dinâmico viscoelástico.

ABSTRACT

Mechanical systems of interest may be subject to unwanted vibration and noise. For attenuation of excessive vibration and noise, viscoelastic materials stand out due to their effectiveness in control actions. A well-established way to characterize the dynamic behavior of viscoelastic materials over broad frequency and temperature ranges has been the representation by complex modules. This behavior is described by the four-parameter fractional derivative model, aided by the WLF or Arrhenius equations. In view of the significant dispersion in experimental data on viscoelastic materials, it is sought to describe their dynamic properties using probabilistic methods. It is particularly emphasized the use of Bayesian inference, in which probability distributions for the parameters of the models are obtained. The present work employs the use of a probabilistically modeled viscoelastic material, through the approach of Bayesian inference, in a vibration isolation design and also in a vibration neutralization design. Throughout the work it is described the relevant dynamic characterization of the material as well as the mathematical formulations of both the isolation and neutralization problems. As results, in the vibration isolation, the transmissibility curves are displayed for each parameter value set of the viscoelastic material characterized by Bayesian inference. Besides, regarding neutralization, it is shown the optimum frequency of the neutralizer that provides the smallest reduction in vibration. Moreover, the different design factor values of isolators and neutralizers are presented along with the dimensions resulting from these values. Those outcomes show that, for vibration control, the probabilistic approach allows a better understanding of the results associated with the use of viscoelastic materials.

Keywords: Vibration control; Bayesian inference; Vibration isolation; Viscoelastic material; Viscoelastic dynamic neutralizer.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Tipos de deformações em materiais elásticos.	19
2	Modelos mecânicos: (a) Maxwell; (b) Kevin-Voigt; (c) Zener.	21
3	Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a frequência.	27
4	Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a temperatura.	27
5	Nomograma de frequência reduzida.	29
6	Modelo de isolamento de força.	33
7	Sistema sobre base de impedância finita.	36
8	FRF para um sistema linear com NDV.	42
9	Modelo do sistema composto.	43
10	Sistemas equivalentes.	44
11	Método de Nelder e Mead.	48
12	Dados com HDI de 95% e média das predições posteriores.	60
13	Exemplo com HDI de 95%.	60
14	Nomograma do material EAR ISODAMP C-1002.	65
15	Nomograma de frequência reduzida das médias preditas.	66
16	Verificação preditiva - Módulo real de elasticidade.	68
17	Verificação preditiva - Módulo imaginário de elasticidade.	69
18	Módulo real para os 2.000 conjuntos de parâmetros e as 25 amostras experimentais.	70
19	Módulo real para as estatísticas descritivas dos 2.000 conjuntos de parâmetros.	71
20	Módulo real ajustado para as estatísticas descritivas dos 2.000 conjuntos de parâmetros.	71
21	Esquema de montagem do motoesmeril.	73
22	Motoesmeril plus Schulz 5" 180W.	74
23	Módulo da transmissibilidade na temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$	77
24	Módulo da transmissibilidade na temperatura de $17,4^{\circ}\text{C}$	78
25	Módulo da transmissibilidade na temperatura de $33,5^{\circ}\text{C}$	78
26	Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	80
27	Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	81
28	Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	81
29	Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	82
30	Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	82
31	Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	83
32	Aferição do desempenho - Isolamento - Parâmetros da média ($33,5^{\circ}\text{C}$).	84
33	Aferição do desempenho - Isolamento - Parâmetros da média ($-2,1^{\circ}\text{C}$).	85
34	Aferição do desempenho - Isolamento - Parâmetros da média ($17,4^{\circ}\text{C}$).	85
35	Módulo da receptância na temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$	87
36	Módulo da receptância na temperatura de $17,4^{\circ}\text{C}$	88
37	Módulo da receptância na temperatura de $33,5^{\circ}\text{C}$	88
38	Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	90
39	Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	91
40	Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	92

41	Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	92
42	Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	93
43	Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	93
44	Aferição do desempenho - Neutralização - Parâmetros da média ($33,5^{\circ}\text{C}$).	94
45	Aferição do desempenho - Neutralização - Parâmetros da média ($-2,1^{\circ}\text{C}$).	94
46	Aferição do desempenho - Neutralização - Parâmetros da média ($17,4^{\circ}\text{C}$).	95
47	Ajuste do Módulo Real para os Valores da Média.	116
48	Ajuste do Módulo Real para os Valores do Percentil de 2,5%.	116
49	Ajuste do Módulo Real para os Valores do Percentil de 97,5%.	117

LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros do material viscoelástico caracterizado via Inferência Bayesiana.	72
2	Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	76
3	Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	77
4	Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	77
5	Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$.	79
6	Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$.	79
7	Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$.	79
8	Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$.	79
9	Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$.	79
10	Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$.	80
11	Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	86
12	Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	86
13	Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	86
14	Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimen- sões 1 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	88
15	Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimen- sões 1 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	89
16	Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimen- sões 1 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	89
17	Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimen- sões 2 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$	89
18	Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimen- sões 2 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$	89
19	Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimen- sões 2 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$	90

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

A	- Área da seção transversal
A'	- Área não carregada
B	- Módulo volumétrico
b_m	- Parâmetro do modelo fracionário
b_1	- Parâmetro do modelo fracionário
c_1	- Constante de amortecimento do sistema primário
d	- Diâmetro
D^{κ_m}	- Derivada de ordem fracionária
D^{α_n}	- Derivada de ordem fracionária
E	- Módulo de Young / Módulo de elasticidade
E_0	- Módulo instantâneo ou relaxado
E_n	- Parâmetro do modelo fracionário
E_c	- Módulo complexo de elasticidade
E'	- Módulo de perda
f	- Força de excitação
f_k	- Força do isolador
f_{obj}	- Função objetivo
f_T	- Força transmitida
$F(\Omega)$	- Transformada de Fourier de f
$\overline{F_b}$	- Força aplicada sobre a base
g	- Aceleração da gravidade
G	- Módulo dinâmico de cisalhamento
G_c	- Módulo complexo de cisalhamento
G_0	- Módulo instantâneo ou relaxado
G_1	- Parâmetro do modelo fracionário
G_∞	- Módulo não relaxado ou de longo tempo
$g_j(x)$	- j -ésima restrição de desigualdade
$H(\Omega)$	- Função resposta em frequência
h	- Altura
$h_i(x)$	- i -ésima restrição de igualdade
i	- $\sqrt{-1}$
k_b	- Rigidez dinâmica na base
k_1	- Constante de rigidez do sistema primário
\overline{k}	- Rigidez dinâmica complexa
$\overline{k_{eq}}$	- Rigidez dinâmica complexa equivalente
L	- Fator de projeto
M	- Relação entre tensão e deformação
m	- Massa
n	- Número de isoladores / Tamanho de amostra
N	- Tamanho populacional
P	- Peso

Q	- Energia de ativação
R	- Constante universal dos gases
R_∞	- Razão de resposta
\overline{R}	- Razão de resposta
\mathbb{R}	- Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	- Espaço n-dimensional
s_c	- Fator de forma
\overline{T}	- Transmissibilidade complexa
T	- Temperatura / Transmissibilidade
T_A	- Temperatura de ativação
T_d	- Transmissibilidade desejada
T_0	- Temperatura de referência
t	- tempo
X	- Transformada de Fourier de x
x	- Vetor de projeto / Deslocamento vertical
x_1	- Coordenada generalizada do sistema primário
x_2	- Coordenada generalizada do sistema secundário
Y	- Transformada de Fourier de y / Variável aleatória
y	- Excitação sobre o sistema primário ou estrutura
$\overline{Z}(\Omega)$	- Impedância

Alfabeto Grego

α	- Nível de significância
α_n	- Ordem fracionária
α_T	- Deslocamento das curvas de $G(\Omega)$ ou $E(\Omega)$
β	- Parâmetro fracionário
δ	- Deflexão
ε	- Deformação
η_G	- Fator de perda de cisalhamento ao material viscoelástico
η_E	- Fator de perda longitudinal do material viscoelástico
κ_m	- Ordem fracionária
μ	- Média populacional
ν	- Coeficiente de Poisson
ν_c	- Coeficiente complexo de Poisson
Ω	- Frequência
Ω_n	- Frequência natural
Ω_e	- Frequência de uma certa excitação
Ω_R	- Frequência reduzida
Ω_i	- Frequência inicial
Ω_f	- Frequência final
σ	- Tensão / Desvio padrão populacional
σ^2	- Variância populacional
θ	- Parâmetro do modelo Bayesiano
θ_1	- Parâmetro empírico do material na equação WLF
θ_2	- Parâmetro empírico do material na equação WLF

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Objetivo Geral	16
1.1.1 Objetivos Específicos	16
1.2 Estrutura do texto	17
2 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	18
2.1 Propriedades Dinâmicas do Material Viscoelástico	18
2.2 Modelos de Caracterização do Material Viscoelástico	20
2.2.1 Modelo de Derivada de Ordem Inteira	21
2.2.2 Modelo de Derivada de Ordem Fracionária	23
2.3 Dependência em Frequência e Temperatura	25
3 CONTROLE DE VIBRAÇÕES	31
3.1 Isolamento de Vibrações	32
3.1.1 Transmissibilidade Complexa	32
3.1.2 Impedância Infinita versus Impedância Finita	36
3.1.3 Elemento Viscoelástico Cilíndrico	39
3.2 Neutralização de Vibrações	42
3.2.1 Modelo Matemático do Sistema Composto	43
3.2.2 Técnica de Otimização Não Linear	46
3.2.3 Projeto Ótimo do Sistema de Controle	48
4 INFERÊNCIA BAYESIANA	50
4.1 Distribuições a Priori	51
4.2 Função de Verossimilhança e Princípio da Verossimilhança	52
4.3 Teorema de Bayes	54
4.4 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov	55
4.4.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings	56
4.4.2 Amostrador de Gibbs	56
4.4.3 Objetivos do MCMC	58
4.5 Verificação Preditiva da Posteriori	59
4.6 Inferência Bayesiana em Fenômenos Vibratórios	60
5 METODOLOGIA E MATERIAIS	65
5.1 Material Viscoelástico	65
5.2 Caracterização Probabilística do Material	66
5.2.1 Parâmetros do Material via Inferência Bayesiana	67
5.2.2 Seleção dos Parâmetros do Material	69
5.3 Projetos de Controle de Vibrações	72
5.3.1 Projeto de Isolamento	72
5.3.2 Projeto de Neutralização	74
5.3.3 Cálculo das Dimensões do Elemento Cilíndrico	75

6	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	76
6.1	Resultados para o Projeto de Isolamento	76
6.1.1	Frequências Características e Fatores de Projeto	76
6.1.2	Dimensões dos Isoladores	79
6.1.3	Aferição do Desempenho - Projeto de Isolamento	84
6.2	Resultados para o Projeto de Neutralização	86
6.2.1	Frequências Características e Fatores de Projeto	86
6.2.2	Dimensões do Elemento Resiliente do Neutralizador	88
6.2.3	Aferição do Desempenho - Projeto de Neutralização	93
6.3	Análise Final	96
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	97
7.1	Conclusões	97
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	98
	REFERÊNCIAS	99
	ANEXO A - Programa Computacional do Modelo Bayesiano	109
	APÊNDICE A - Módulos Reais Simulados e Ajustados	116
	APÊNDICE B - Programa Computacional para o Projeto de Isolamento	118
	APÊNDICE C - Programa Computacional para o Cálculo das Dimensões dos Dispositivos Cilíndricos	121
	APÊNDICE D - Programa Computacional para o Projeto de Neutralização	125

1 INTRODUÇÃO

Significativa parte dos sistemas reais envolve vibrações e ruídos. Quando se ouve música, os tímpanos vibram; consegue-se enxergar porque as ondas de luz sofrem vibração; máquinas vibram em seu funcionamento; fundações, pontes, turbinas e motores vibram face a alguma fonte externa ou interna ao seu sistema.

Uma vibração pode estar associada a uma função de interesse, como em máquinas de lavar, escovas de dentes elétricas, esteiras transportadoras, barbeadores, peneiras vibratórias e equipamentos para testes vibratórios de materiais e simulação de terremotos em estudos geológicos. Entretanto, vibrações ou ruídos em excesso podem se apresentar de maneira desfavorável, resultando em aborrecimento auditivo às pessoas, desconforto, perda de eficiência do sistema, falhas mecânicas, fadiga de estruturas, desgaste de peças, desbalanceamento de motores e quedas de pontes, dentre outros danos (Teng e Hu, 2001). Portanto, o controle de vibrações e ruído consiste em medidas para redução de altos níveis desses fatores.

Para atenuação de vibrações e ruídos excessivos, destacam-se os materiais viscoelásticos, face à eficácia na introdução de amortecimento. Segundo Ferry (1980), os materiais viscoelásticos apresentam bom desempenho no tocante à dissipação de energia mecânica, possuindo um comportamento que combina características elásticas e viscosas. O comportamento elástico é responsável pelo armazenamento de energia e a parte viscosa encarrega-se da dissipação desta energia.

Segundo Findley et al. (1976) os materiais viscoelásticos têm propriedades mecânicas dependentes do tempo e/ou da frequência. Vários modelos têm sido estudados para se descrever o comportamento dos materiais viscoelásticos. Vai-se dos modelos mais simples, como os de Kelvin e Maxwell, para os modelos mais elaborados, como o estudado por Rogers (1983), que utilizou derivadas fracionárias para descrever as variações do módulo de elasticidade e do fator de perda em uma ampla banda de frequências e temperaturas. Essa representação pelo modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros é uma forma bem estabelecida e muito utilizada para descrever o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos termoreologicamente simples, em amplas faixas de frequência e temperatura (Pritz, 1996). Tal modelo paramétrico é empregado, por exemplo, em Espíndola et al. (2010).

A aleatoriedade é uma característica marcante nas propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos. Ela se faz presente seja em decorrência dos processos de fabricação desses materiais, seja em decorrência dos procedimentos experimentais de determinação das propriedades de interesse (Lopes, 1989; Hilton et al., 1991; Beldica e Hilton, 1999; Hilton, 2003; Scherbakov e Gurvich, 2005; Balbino, 2012). A título de ilustração, expõe-se que Lopes (1989) e Balbino (2012), usando métodos experimentais distintos para caracterização dinâmica em frequência e temperatura, relatam dispersões para o módulo dinâmico

de elasticidade (dispersões estas avaliadas em termos do coeficiente de variação) que vão de 6% a 76%, com um grande número de casos entre 10% e 26%.

A partir de um conhecimento detalhado do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, a realização de projetos eficazes de controle de vibrações torna-se possível. Os sistemas de controle de vibrações podem ser divididos, face à ausência ou presença de fonte externa de potência, em passivos e ativos (Ahl'en e Sternad, 1994; Marra, 2007). Quando há a combinação dos controles passivo e ativo, resulta o controle misto, ou híbrido. Podem ser citadas diversas técnicas de controle passivo com materiais viscoelásticos, tais como a inserção de dispositivos auxiliares, conhecidos como neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, a introdução de amortecimento, como em vigas sanduíche viscoelásticas, a adição de elos viscoelásticos e a implementação de sistemas de isolamento viscoelásticos.

O isolamento de vibrações aparece de duas maneiras equivalentes, o isolamento de força e o isolamento de movimento. A primeira acontece quando a força de excitação é gerada pelo sistema mecânico e pretende-se reduzir tal excitação quando de sua transmissão para a base. Já na segunda, a vibração é gerada pelo meio e deve-se reduzir essa vibração, no trajeto do meio para o sistema mecânico.

Em um projeto de isolamento, os elementos de material resiliente, denominados isoladores, conectam o equipamento à sua estrutura de suporte e podem ser feitos de material viscoelástico. A função transmissibilidade é empregada para descrever a eficácia do sistema de isolamento projetado (Snowdon, 1968).

Já no tocante aos neutralizadores dinâmicos, objetiva-se reduzir a resposta de um sistema submetido a excitações em uma região de frequência na qual esse sistema possui uma ou mais frequências naturais. Um dos pioneiros na aplicação de neutralizadores para suprimir vibrações foi Frahm (1909), desenvolvendo a técnica correspondente através da utilização da transferência de água entre tanques para reduzir as oscilações de navios. Outro pioneiro foi Den Hartog (1956), que apresentou o modelo matemático de um sistema de dois graus de liberdade (sistema primário mais neutralizador dinâmico massa-mola-amortecedor) e, a partir da teoria dos pontos fixos, conseguiu determinar, de forma ótima os parâmetros do neutralizador dinâmico.

Um neutralizador simples é composto de uma certa massa fixada a um elemento resiliente (de material viscoelástico ou composto por mola/amortecedor, entre outros), que por sua vez é acoplado ao sistema primário (sistema a controlar). Os parâmetros ótimos do neutralizador, que devem conduzir a uma resposta mínima do sistema, são determinados através da escolha adequada dentre os possíveis parâmetros físicos/dimensionais. As técnicas de otimização não linear têm sido aplicadas na obtenção desses parâmetros ótimos dos neutralizadores, como se observa em Kitis (1983).

No tocante à caracterização dinâmica dos materiais viscoelásticos, através de métodos da estatística clássica, é possível se chegar a valores específicos para parâmetros desconhecidos. Nessa caracterização, busca-se descrever as propriedades dinâmicas de um

material viscoelástico a partir de modelos que contém tais parâmetros. Já pela inferência bayesiana, como se observa em Gogu et al. (2010), são obtidas, para os parâmetros, distribuições de probabilidade.

Uma das características marcantes da abordagem bayesiana é que, por meio dela, inferências sobre parâmetros desconhecidos podem ser feitas associando-se, de forma explícita, conhecimentos prévios e dados experimentais (O'Hagan, 1994; Coles apud Ribeiro Jr., 2018). Esta característica é de particular relevância no contexto em que o presente trabalho é desenvolvido, face à larga base de informações já levantadas sobre propriedades dinâmicas de materiais viscoelásticos (Lopes, 1989; Espíndola et al, 2005a; Medeiros Júnior, 2010; Balbino, 2012 e 2016; Olienick Filho et al., 2019), com vistas à aplicação no controle de vibrações e ruídos acústicos. Embora, como apontado por Kruschke (2015), testes estatísticos clássicos façam algo análogo à análise bayesiana em todos os casos, eles não contemplam o uso de informações prévias (ao menos, não deliberadamente), o que se entende como valioso na investigação em questão.

A abordagem bayesiana incorpora o conhecimento prévio acerca de um fenômeno antes da coleta de dados, através de funções distribuição de probabilidade a priori. O conhecimento a priori e as informações provenientes dos dados são reunidos na função de verossimilhança, para se modelar, de forma probabilística, as quantidades incertas. Isso ocorre por meio de funções densidade de probabilidade, denominadas distribuições a posteriori (Kruschke, 2015).

Face ao cenário apresentado acima, o objetivo geral a ser desenvolvido na tese é apresentado na sequência. Nos capítulos subsequentes, também apresentados na sequência, detalham-se os conceitos mencionados de forma sucinta nesta introdução, bem como são expostos os demais elementos da tese.

1.1 Objetivo Geral

Empregar um material viscoelástico caracterizado probabilisticamente por inferência bayesiana em projetos de controle passivo de vibrações mecânicas.

1.1.1 Objetivos Específicos

- Estimar os parâmetros de um material viscoelástico caracterizado via inferência bayesiana, usando o modelo de derivada de ordem fracionária de quatro parâmetros, em associação com o modelo de Arrhenius.
- Utilizar os parâmetros caracterizados probabilisticamente em um projeto de isolamento de vibrações e em um projeto de neutralização de vibrações, ambos visando o controle passivo de um sistema com um grau de liberdade.
- Verificar a propagação das incertezas nas propriedades dinâmicas do material para

as dimensões dos elementos resilientes utilizados nos projetos de controle aqui propostos.

1.2 Estrutura do texto

Este trabalho é estruturado em sete capítulos, incluindo a presente introdução, que constitui o primeiro capítulo.

No capítulo 2, são introduzidas as características que definem um material viscoelástico e a aplicação da derivada fracionária de quatro parâmetros para modelar o comportamento do material. Mostra-se a importância do uso do cálculo fracionário e a razão da sua utilização em viscoelasticidade.

No capítulo 3, é apresentada a teoria pertinente ao controle de vibrações. Inicialmente, expõe-se o projeto de isolamento de força. E em seguida, faz-se a descrição do controle com a utilização de um neutralizador dinâmico viscoelástico.

No capítulo 4, introduzem-se os conceitos da inferência bayesiana, abordagem adotada para a representação do material viscoelástico empregado neste estudo.

No capítulo 5, é apresentado o material viscoelástico utilizado, bem como sua caracterização via inferência bayesiana. Os procedimentos e variáveis dos projetos de controle também são expostos, tanto para o caso de isolamento, quanto para o de neutralização. São detalhados ainda os programas computacionais desenvolvidos para as nas simulações realizadas.

No capítulo 6, são apresentados os resultados alcançados neste estudo e realizadas as análises correspondentes.

No capítulo 7, relatam-se as considerações finais do trabalho e as sugestões para continuidade da pesquisa.

Por fim, são incluídas as referências bibliográficas consultadas, bem como o anexo e os apêndices pertinentes.

2 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Um material puramente elástico e linear comporta-se de acordo com a lei de Hooke, em que a tensão é diretamente proporcional à deformação. Já para um material puramente viscoso e linear, a tensão é diretamente proporcional à taxa de deformação. Segundo Tschoegl (1989), a combinação destes dois casos descreve o comportamento de um material viscoelástico linear. Para Findley et al. (1976), a viscoelasticidade também combina a elasticidade com a viscosidade; materiais com essa característica são materiais com propriedades mecânicas dependentes do tempo e/ou da frequência.

Tem-se um material elástico quando uma tensão é aplicada e esse material se deforma imediatamente, retornando à sua forma e volume originais quando aquela é retirada. Já um material viscoso se deforma de maneira contínua e irreversível sob tensão, ou seja, quando a tensão é retirada, tal material não retorna ao seu estado original. A viscosidade é uma propriedade do material, independente da sua geometria (Tschoegl, 1989).

Assim, em um material viscoelástico, ocorrem deformações elásticas e viscosas simultaneamente (Ferry, 1980). Materiais que exibem comportamento viscoelástico são, entre outros: elastômeros, plásticos, fibras naturais e sintéticas e metais a temperaturas elevadas. Os materiais viscoelásticos são atraentes devido às suas características de dissipação de energia e atualmente são usados em diversas aplicações nas indústrias aeroespacial, eletromotora e eletrônica (Hernandez et al., 2015a).

2.1 Propriedades Dinâmicas do Material Viscoelástico

As relações entre tensão e deformação dos materiais viscoelásticos podem ser descritas de maneira análoga à empregada na teoria da elasticidade clássica, através do módulo de elasticidade E ou do módulo de cisalhamento G , só que agora complexos (Snowdon, 1968; Tschoegl, 1989; Hibbeler, 2008). Segundo Snowdon (1968), para os materiais viscoelásticos, a abordagem por módulos de elasticidade complexos tem sido um modo bem estabelecido de se descrever aquelas relações.

Ainda de acordo com Snowdon (1968) e Rivin (2003), há dois tipos de deformações elementares que um material elástico pode sofrer: de cisalhamento e volumétrica. Quando a deformação é de cisalhamento, há variação de forma e não de volume, enquanto que, na deformação volumétrica, o material sofre variação de volume mas não de forma.

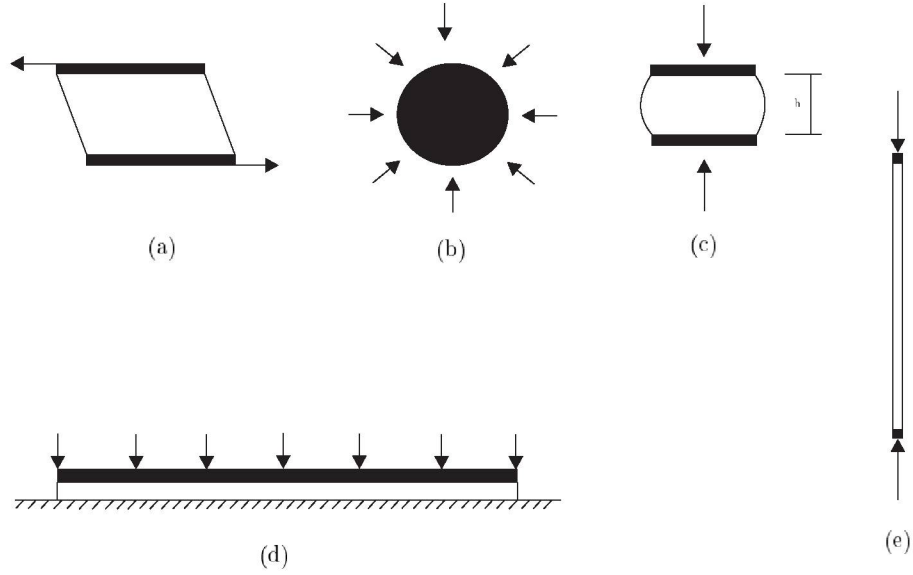
A deformação de cisalhamento, ilustrada de forma típica na Figura 1.a, é descrita pelo módulo de cisalhamento G . Já a Figura 1.b apresenta uma deformação volumétrica descrita pelo módulo volumétrico B (Snowdon, 1968; Rivin, 2003). Uma deformação mista, com variação de forma e volume, é ilustrada na Figura 1.c.

Quando tem-se uma placa em que as dimensões laterais são grandes, se comparadas com a espessura, conforme mostra a Figura 1.d, o material pode apresentar características tais que a relação entre tensão e deformação é aproximada pelo módulo M , tal que

$$M = B + \left(\frac{4G}{3}\right) \cong B, \quad (2.1)$$

onde $B \gg G$, ou seja, o módulo volumétrico B é numericamente muito maior que o módulo de cisalhamento G .

Figura 1: Tipos de deformações em materiais elásticos.



FONTE: O Autor.

Já no caso apresentado pela Figura 1.e, que é a situação contrária à da Figura 1.d, com as dimensões laterais pequenas em comparação com a espessura, e também no caso mais realista dessa configuração, como apresentado na Figura 1.c, a relação entre tensão e deformação é governada pelo módulo de Young E (ou módulo de elasticidade longitudinal), em função de B e G , tal que

$$E = \frac{9BG}{3B + G}. \quad (2.2)$$

Tem-se ainda a relação entre as deformações lateral e axial, que é descrita pelo coeficiente de Poisson, dado por

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (2.3)$$

Em muitos materiais (por exemplo, elastômeros) o módulo de cisalhamento é muito menor do que o módulo volumétrico. Um material desse tipo parece incompressível, face à facilidade com que ele é cisalhado. Dessa forma, quando $B \gg G$, o material é chamado incompressível, e as equações (2.2) e (2.3) podem ser aproximadas por $E \approx 3G$ e $\nu \approx 0,5$.

Para materiais viscoelásticos, a abordagem por módulos de elasticidade complexos visa primordialmente descrever as relações entre tensão e deformação no domínio da frequência, decorrentes do comportamento observado nesses materiais. Dessa forma, em geral, a rigidez dinâmica complexa \bar{k} , dependente da frequência Ω e da temperatura T , de um elemento de material viscoelástico é dada por (Espíndola et al., 2008)

$$\bar{k}(\Omega, T) = LE_c(\Omega, T), \quad (2.4)$$

onde L é chamado de fator de projeto, enquanto E_c é o módulo complexo de elasticidade, sendo que ambos são melhor definidos adiante.

O modo de representar a rigidez complexa de um elemento de material viscoelástico dado pela equação (2.4) é muito usado, devido à sua conveniência e eficácia em projetos de controle de vibrações e ruído. Para um elemento elastomérico à compressão, $L = (A/h)s_c$, sendo A a área da seção transversal, h a altura, e s_c um fator de forma (Nashif et al., 1985). Também o fator de forma será melhor definido.

2.2 Modelos de Caracterização do Material Viscoelástico

O uso da derivada fracionária tem aflorado como uma ótima opção para se modelar o comportamento viscoelástico e gerar modelos paramétricos (Bagley e Torvik, 1979; Bagley e Torvik, 1986; Torvik e Bagley, 1987; Pritz, 1996; Rossikhin e Shitikova, 1998; Lopes, 1998 e Espíndola et al., 2005a e 2005b). Como reafirmado por Cruz (2004), esses modelos produzem uma representação analítica adequada nos domínios do tempo e da frequência, além de serem consistentes com teorias moleculares que explicam o comportamento mecânico do meio viscoelástico.

A eficácia dessa abordagem foi largamente estudada e comprovada por Pritz (1996), tendo ela sido utilizada para descrever o comportamento dinâmico de vários materiais, tais como metais, estratos geológicos e vidro, além de polímeros para controle de vibrações. Neste trabalho, esse modelo será utilizado para descrever um material viscoelástico.

Contudo, antes de abordar o modelo com derivada de ordem fracionária, serão discutidas algumas características do modelo com derivada de ordem inteira.

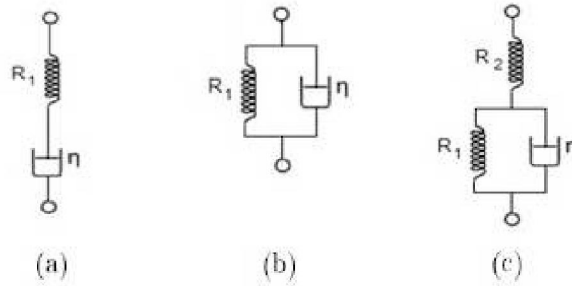
2.2.1 Modelo de Derivada de Ordem Inteira

De acordo com Tschoegl (1989), expressar o comportamento de um material em forma de uma equação constitutiva significa que, através desta equação, é possível especificar as propriedades do material, de maneira que isso não dependa do tamanho ou da geometria do corpo mas apenas da natureza do material. A relação constitutiva clássica para o modelo viscoelástico linear padrão no domínio do tempo é dada por

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m \sigma(t)}{dt^m} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n \varepsilon(t)}{dt^n}, \quad (2.5)$$

onde $\sigma(t)$ denota a tensão, $\varepsilon(t)$ é a deformação, b_m , E_0 , E_n são parâmetros do material e M , N são números inteiros. A equação (2.5) pode ser melhor compreendida quando relacionada a modelos mecânicos equivalentes como os modelos de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener (Figura 2.a, 2.b e 2.c, respectivamente), elaborados a partir de combinações de molas elásticas e amortecedores viscosos (Gent, 2001).

Figura 2: Modelos mecânicos: (a) Maxwell; (b) Kevin-Voigt; (c) Zener.



FONTE: O Autor.

Ao se aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados da equação (2.5), tem-se

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + \sum_{n=1}^N E_n (i\Omega)^n}{1 + \sum_{m=1}^M b_m (i\Omega)^m}, \quad (2.6)$$

onde Ω é a frequência, enquanto $\sigma(\Omega)$ e $\varepsilon(\Omega)$ são as transformadas de Fourier da tensão e deformação, respectivamente.

A descrição no domínio da frequência justifica-se pelo fato de que grande parte dos problemas de controle passivo de vibrações e ruídos utilizando materiais viscoelásticos são resolvidos nesse domínio (Snowdon, 1968; Nashif et al., 1985; Pritz, 2000). A quantidade $E_c(\Omega)$ é, então, conhecida como o módulo complexo de elasticidade, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$E_c(\Omega) = E(\Omega) + iE'(\Omega). \quad (2.7)$$

No módulo de elasticidade complexo, expresso acima, $E(\Omega)$ é o módulo real, ou dinâmico, de elasticidade (parte real de E_c) e é uma descrição do comportamento elástico do material. Já $E'(\Omega)$ é o módulo imaginário de elasticidade, também dito módulo de perda (parte imaginária de E_c), que representa o comportamento dissipativo do material viscoelástico.

Tem-se, também, que a parte imaginária da expressão (2.7) é uma medida da capacidade que o material possui para transformar energia mecânica em calor. Esta medida fica melhor evidenciada em termos do fator de perda do material, definido por

$$\eta_E(\Omega) = \frac{E'(\Omega)}{E(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Assim, a expressão (2.7) pode ser colocada da seguinte forma:

$$E_c(\Omega) = E(\Omega)[1 + i\eta_E(\Omega)]. \quad (2.9)$$

Com o intuito de determinar uma estratégia eficaz de controle de vibração usando materiais viscoelásticos, as propriedades dinâmicas fundamentais, a saber, o módulo dinâmico de elasticidade e o fator de perda, devem ser perfeitamente conhecidas. Estas propriedades, em geral, são dependentes da frequência, e também da temperatura (o que ainda não é indicado acima).

Para uma representação fidedigna do comportamento dos materiais viscoelásticos, números muito grandes de termos (M e N) são requeridos nas equações (2.5) e (2.6). Isso

acarreta um elevado número de parâmetros nos modelos, gerando descrições extremamente custosas do ponto de vista de tempo computacional. No entanto, essas relações podem ser aprimoradas, substituindo as derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem fracionária. As características relacionadas ao modelo de derivada de ordem fracionária, para descrição de materiais viscoelásticos, são abordadas na sequência.

2.2.2 Modelo de Derivada de Ordem Fracionária

A equação constitutiva unidimensional no domínio do tempo com derivadas fracionárias é dada por (Pritz, 1996)

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\kappa_m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} \varepsilon(t), \quad (2.10)$$

onde b_m , κ_m , E_0 , E_n e α_n são parâmetros do material em consideração. As expressões D^{κ_m} e D^{α_n} representam derivadas de ordem fracionária κ_m e α_n , respectivamente. Para $0 < \alpha_n < 1$ (o que também vale para κ_m), adota-se a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville (Bagley e Torvik, 1986), qual seja,

$$D^{\alpha_n}[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_n)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t - \xi)^{\alpha_n}} d\xi. \quad (2.11)$$

Algumas observações experimentais mostram que vários materiais viscoelásticos de interesse podem ser modelados tomando-se apenas as primeiras derivadas fracionárias de cada série na equação (2.10). No caso particular em que $M = N = 1$ e $\kappa_m = \alpha_n = \beta$, resulta o seguinte modelo viscoelástico com quatro parâmetros (b_1 , E_0 , E_1 e β):

$$\sigma(t) + b_1 D^\beta \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 D^\beta \varepsilon(t). \quad (2.12)$$

Aplicando a transformada de Fourier nessa equação, tem-se

$$\sigma(\Omega) + b_1 (i\Omega)^\beta \sigma(\Omega) = E_0 \varepsilon(\Omega) + E_1 (i\Omega)^\beta \varepsilon(\Omega), \quad (2.13)$$

onde $\sigma(\Omega)$ e $\varepsilon(\Omega)$ representam a transformada de Fourier da tensão e da deformação, respectivamente.

Ao manipular-se a equação (2.13), chega-se a

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + E_1(i\Omega)^\beta}{1 + b_1(i\Omega)^\beta}. \quad (2.14)$$

Na equação (2.14), observa-se que o módulo complexo de elasticidade dependente da frequência é, especificamente, uma função de uma potência fracionária da frequência.

Analogamente à equação (2.14), tem-se, para o módulo complexo de cisalhamento $G_c(\Omega)$, a seguinte equação:

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_1(i\Omega)^\beta}{1 + b_1(i\Omega)^\beta}. \quad (2.15)$$

As equações (2.14) e (2.15) constituem modelos de derivada fracionária com quatro parâmetros.

O módulo complexo de cisalhamento, assim como o módulo complexo de elasticidade, pode ser expresso por

$$G_c(\Omega) = G(\Omega)[1 + i\eta_G(\Omega)], \quad (2.16)$$

onde $\eta_G(\Omega)$ é denominado fator de perda ao cisalhamento, ou cisalhante. Segundo Snowdon (1968), para elastômeros em geral, $\eta_G(\Omega) = \eta_E(\Omega)$, o que também é válido para alguns materiais metálicos.

Outras alternativas para a equação (2.15) podem ser escritas. Por exemplo, fazendo $G_1 = G_\infty b_1$, tem-se

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_\infty b_1(i\Omega)^\beta}{1 + b_1(i\Omega)^\beta}. \quad (2.17)$$

Já, por simplicidade, fazendo $b_1 = b$, decorre que

$$G_c(\Omega) = \frac{\tau(\Omega)}{\gamma(\Omega)} = \frac{G_0 + G_\infty b(i\Omega)^\beta}{1 + b(i\Omega)^\beta}. \quad (2.18)$$

Na equação (2.18), observa-se que os quatro parâmetros são: α , b , G_0 e G_∞ , onde G_0 e G_∞ são o módulo instantâneo ou relaxado e o módulo não relaxado ou de longo tempo, respectivamente. A constante b é conhecida como constante de relaxação, ao passo que β é uma constante adimensional, proveniente da derivada fracionária, sendo, portanto, tal que $0 < \beta < 1$.

Analogamente, o módulo complexo de elasticidade no domínio da frequência pode ser escrito como

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + E_\infty b(i\Omega)^\beta}{1 + b(i\Omega)^\beta}. \quad (2.19)$$

A seguir exploram-se mais detalhes sobre a dependência em frequência e temperatura dos materiais viscoelásticos.

2.3 Dependência em Frequência e Temperatura

Uma vez que as propriedades dinâmicas de um material viscoelástico também variam com a temperatura, tem-se, a partir das equações (2.9) e (2.16), que os módulos complexos de elasticidade e de cisalhamento, como funções da frequência Ω e da temperatura T podem ser expressos, respectivamente, através de

$$E_c(\Omega, T) = E(\Omega, T)[1 + i\eta_E(\Omega, T)] \quad (2.20)$$

e

$$G_c(\Omega, T) = G(\Omega, T)[1 + i\eta_G(\Omega, T)]. \quad (2.21)$$

Pela analogia com a teoria clássica da elasticidade, tem-se que o módulo complexo de elasticidade se relaciona com o módulo complexo de cisalhamento e com o coeficiente de Poisson da seguinte forma (Lakes, 1999):

$$\nu_c(\Omega, T) = \frac{E_c(\Omega, T)}{2G_c(\Omega, T)} - 1, \quad (2.22)$$

onde ν_c é o coeficiente complexo de Poisson.

Conforme já exposto anteriormente, para materiais viscoelásticos típicos como elastômeros, o coeficiente de Poisson é, usualmente, assumido como sendo real e aproximadamente igual a 0,5. Sendo assim, decorre que (Gent, 2001)

$$E(\Omega, T) \approx 3G(\Omega, T) \quad (2.23)$$

e

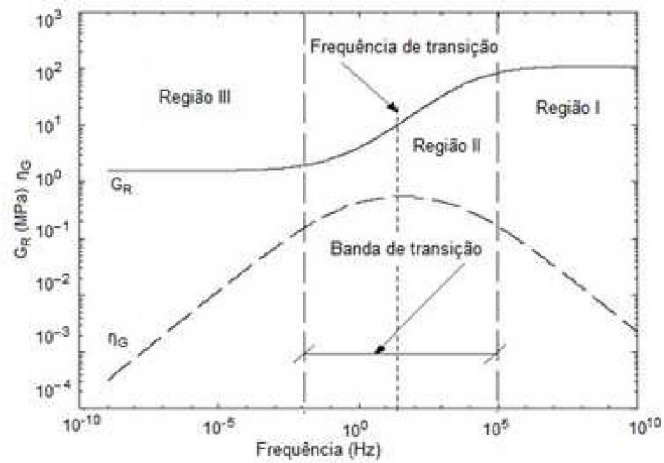
$$\eta_E(\Omega, T) \approx \eta_G(\Omega, T). \quad (2.24)$$

Sabe-se que tanto o módulo dinâmico de elasticidade E (ou o de cisalhamento G) quanto o fator de perda η_E (ou η_G) são inversamente dependentes no tocante à frequência e à temperatura. A Figura 3 e a Figura 4, com o módulo $G = G_R$, apresentam essas dependências. Assim, se a frequência aumenta, então o módulo G aumenta (Figura 3); já se a temperatura aumenta, então o módulo G diminui (Figura 4). Agora, se a temperatura permanecer constante e a frequência variar, o fator de perda η_G cresce até a frequência de transição e diminui após esse valor (Figura 3). Isso ocorre analogamente para uma frequência constante e temperatura variável, ou seja, o fator de perda η_G cresce até atingir a temperatura de transição e, após esse valor, começa a decrescer (Figura 4).

Na Figura 3 e na Figura 4, observa-se também que, na Região III, os valores do módulo dinâmico e do fator de perda são baixos e, no caso do módulo dinâmico, praticamente constantes; essa região é largamente utilizada, em geral, no projeto de isoladores viscoelásticos. A Região II é denominada região de transição, onde o módulo dinâmico é altamente variável com a frequência e a temperatura, respectivamente, e o fator de perda

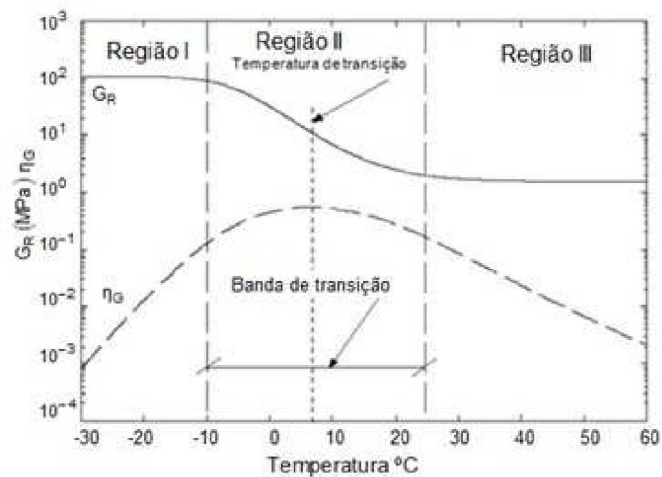
é elevado; essa região pode ser de interesse no projeto de neutralizadores viscoelásticos. Já a Região I é chamada região vítrea e apresenta altos valores para o módulo dinâmico e baixos valores para o fator de perda; essa região, via de regra, não possui aplicação para controle de vibrações.

Figura 3: Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a frequência.



FONTE: Espíndola et al. (2005a).

Figura 4: Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a temperatura.



FONTE: Espíndola et al. (2005a).

Os materiais viscoelásticos são ditos termoreologicamente simples quando seguem o princípio da superposição. Por esse princípio, os efeitos inversos de frequência e temperatura podem ser relacionados, permitindo que se obtenha uma caracterização dinâmica

ampla dos materiais viscoelásticos, em largas faixas de frequência e temperatura. A ideia pode ser detalhada como se segue. Suponha um determinado material exposto a ensaios experimentais em várias temperaturas, onde, para cada uma dessas temperaturas, uma certa faixa de frequências é considerada. Então, um conjunto de curvas experimentais é obtido, associado às temperaturas do ensaio. Para materiais termoreologicamente simples, as curvas obtidas podem ser superpostas em curvas mestres, uma para cada propriedade dinâmica, estabelecendo a dependência em apenas uma variável composta Ω_R , chamada frequência reduzida. Essa variável combina os efeitos da frequência e da temperatura (Ferry et al., 1952; Jones, 1990).

O deslocamento em frequência das curvas, em função da temperatura (T), conduz a definição de Ω_R , conforme à seguinte equação;

$$\Omega_R = \alpha_T(T)\Omega, \quad (2.25)$$

onde $\alpha_T(T)$ é o fator de deslocamento em frequência das curvas, equivalente à alteração em temperatura da temperatura de ensaio T para a temperatura de referência T_0 , e Ω é a frequência.

O fator de deslocamento pode ser representado pela equação Williams-Landel-Ferry (WLF), dada por (Williams et al., 1955)

$$\log_{10}\alpha_T(T) = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{\theta_2 + (T - T_0)}, \quad (2.26)$$

onde θ_1 e θ_2 são parâmetros do material e T_0 é a temperatura de referência, dada na escala Kelvin.

O fator de deslocamento também pode ser determinado através da equação de Arrhenius (Lewis et al., 1989; Jones, 1990), de modo que

$$\log_{10}\alpha_T(T) = T_A \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (2.27)$$

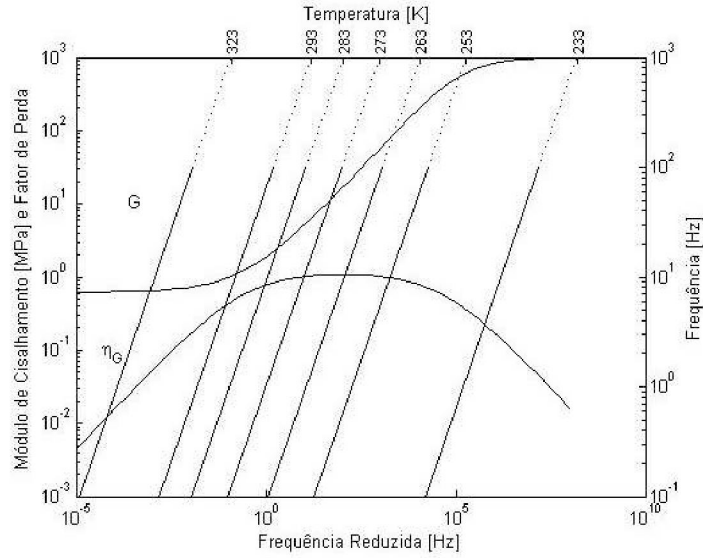
onde $T_A = Q/2,303R$ é chamada temperatura de ativação, em que R representa a constante universal dos gases e Q é a energia de ativação.

Assim, as propriedades dinâmicas podem ser representadas em um único gráfico, onde se tem a curva do módulo dinâmico de cisalhamento (ou de elasticidade) e também

a do fator de perda correspondente, em função da frequência e da temperatura. Esse gráfico é conhecido como nomograma de frequência reduzida, sendo ilustrado na Figura 5.

Entra-se nesse gráfico selecionando a frequência desejada na escala da direita e traçando uma linha horizontal até a isoterma inclinada de interesse. A partir do ponto de encontro da linha horizontal com essa isoterma, traça-se uma linha vertical até interceptar as curvas do fator de perda e do módulo dinâmico de cisalhamento ou de elasticidade. A partir desses pontos de intersecção, estendem-se linhas horizontais até a escala da esquerda, para serem obtidas as leituras do módulo dinâmico e do fator de perda.

Figura 5: Nomograma de frequência reduzida.



FONTE: O Autor.

Com base nos conceitos e definições expostos acima, o módulo complexo de cisalhamento e o análogo módulo complexo de elasticidade podem ser reescritos, a partir das equações (2.17) e (2.19), da seguinte forma:

$$G_c(\Omega, T) = \frac{G_0 + G_\infty b(i\Omega_R)^\beta}{1 + b(i\Omega_R)^\beta} \quad (2.28)$$

e

$$E_c(\Omega, T) = \frac{E_0 + E_\infty b(i\Omega_R)^\beta}{1 + b(i\Omega_R)^\beta}. \quad (2.29)$$

Com a representação das propriedades dinâmicas do material em um nomograma, é possível representar os dados de forma bastante vantajosa, ao longo de amplas faixas de frequência e temperatura, viabilizando-se a representação por módulos complexos para uso em projetos de controle de vibração e ruído. As equações (2.28) e (2.29), com seus parâmetros específicos para cada material, também são utilizadas diretamente em simulações computacionais.

3 CONTROLE DE VIBRAÇÕES

Uma vibração mecânica pode ser observada quando um corpo realiza um movimento oscilatório em torno de uma posição de referência, movimento esse decorrente de ações dinâmicas aplicadas sobre esse corpo. Um exemplo clássico é o movimento oscilatório ao redor do equilíbrio de uma massa suspensa a partir de uma mola.

As vibrações mecânicas podem ser favoráveis em várias aplicações na indústria e no consumo, sendo as vibrações geradas por instrumentos musicais e por equipamentos vibratórios como escovas de dentes elétricas ou peneiras vibratórias alguns exemplos. No entanto, vibrações excessivas podem trazer consequências prejudiciais e causar ruídos desagradáveis. Por exemplo, máquinas sujeitas a elevadas amplitudes de vibração podem apresentar falhas por fadiga, ou, ainda, alguns ruídos gerados por motores podem ser desconfortáveis à audição humana. Como salientado por Cruz (2004), a vibração estrutural é um dos problemas principais na engenharia, podendo ocasionar o colapso de estruturas, ou produzir um elevado nível de ruído irradiado.

Dessa forma, devido aos efeitos devastadores que as vibrações podem causar nas máquinas e estruturas, a análise de vibrações tornou-se fundamental no projeto e desenvolvimento dos sistemas mecânicos de engenharia. Considerando estas situações, de acordo com Aquino (2011), um sistema de controle de vibrações pode ser aplicado com a intenção de reduzir os danos provenientes de níveis de vibração mais altos.

Os sistemas de controle de vibrações podem ser divididos entre passivos e ativos. O controle passivo de vibrações pode atuar sobre a excitação, quando reduz a sua amplitude (como no caso do balanceamento) ou altera a composição do seu espectro, ou pode atuar sobre o sistema, o que consiste em medidas como alteração de massa e/ou rigidez, introdução de amortecimento, dessintonização, isolamento e neutralização. Já o controle ativo de vibrações é baseado no uso de sensores, atuadores e técnicas de processamento de sinais (Aquino, 2011). A combinação de soluções de controle passivo com soluções de controle ativo é classificada como controle misto, ou controle híbrido (Marra, 2007).

Dentre as técnicas de controle passivo de vibrações que envolvem materiais viscoelásticos, têm-se: dispositivos auxiliares conhecidos como neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (Tarng et al., 2000; Espíndola et al., 2008; Espíndola et al., 2010; Bavastri et al., 2014 e Febbo et al., 2016), introdução de amortecimento como em vigas sanduíches viscoelásticas (Barbosa e Farage, 2008; Jacques et al., 2010; Bilasse et al., 2010; Grewal et al., 2013 e Kpeky et al., 2015), elos viscoelásticos (Lázaro et al., 2012; Korayem e Shafei, 2013; Pourhosseini et al., 2014; Korayem e Shafei, 2015 e Attar et al., 2016) e sistemas de isolamento (Chung et al., 2013; Huang et al., 2017; Liu et al., 2016; Lu et al., 2016 e Huang e Xu, 2017). Neste trabalho, o foco será dado a projetos de isolamento e de neutralização.

3.1 Isolamento de Vibrações

O isolamento de vibrações importa-se com maneiras que ocasionam a redução de um efeito vibratório, quando de sua passagem de um sistema mecânico para o meio em que ele se encontra, ou vice-versa. Um isolador de vibrações é um elemento resiliente feito de metal (molas), elastômero, cortiça ou feltro, que conecta um determinado equipamento à sua base e promove, por suas características, a redução desejada.

Há duas formas equivalentes de isolamento, quais sejam, o isolamento de movimento e o isolamento de força. Quando o isolamento é de força, a excitação é gerada pelo próprio sistema mecânico e deve-se reduzir tal excitação, quando de sua transmissão para a base, como em prensas mecânicas que geram excitações e as transmitem para a sua fundação. No caso do isolamento de movimento, a vibração é gerada no meio e busca-se reduzi-la na transmissão da base para o sistema mecânico, como vibrações geradas por irregularidades nas estradas e que são transmitidas à carroceria de um automóvel.

3.1.1 Transmissibilidade Complexa

A eficácia de uma ação de isolamento pode ser determinada através da transmissibilidade, que é uma função de frequência muito utilizada nesse tipo de controle (Snowdon, 1968). Tal função é detalhada logo abaixo, tendo em vista os propósitos do presente trabalho.

Seja um modelo de isolamento, conforme ilustra a Figura 6, que consiste em um sistema com um grau de liberdade. Ele é composto por uma massa e um isolador equivalente de um elemento resiliente feito de material viscoelástico, ligado a uma base de impedância infinita. Na figura, m é a massa do equipamento, $x(t)$ é o deslocamento vertical do equipamento, $f(t)$ é a força de excitação que atua no equipamento e $f_T(t)$ a força transmitida ao meio no qual o equipamento está montado.

Com o intuito de determinar a expressão da transmissibilidade, pela 2ª lei de Newton, tem-se, para o sistema em questão, que

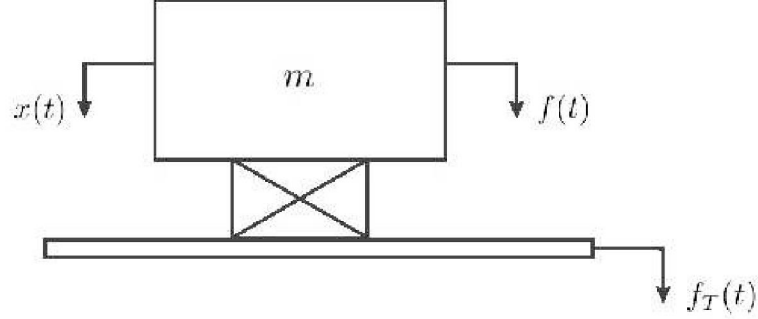
$$\Sigma F = m\ddot{x}(t). \quad (3.1)$$

Portanto,

$$f(t) - f_k(t) = m\ddot{x}(t), \quad (3.2)$$

onde $f_k(t)$ indica a força do isolador sobre a massa.

Figura 6: Modelo de isolamento de força.



FONTE: O Autor.

Aplicando a transformada de Fourier na equação 3.2, obtém-se

$$\overline{F}(\Omega) - \overline{F}_k(\Omega) = -m\Omega^2\overline{X}(\Omega). \quad (3.3)$$

O isolador (elemento resiliente) pode ser modelado por uma rigidez complexa \overline{k} . Fazendo, então, $\overline{F}_k(\Omega) = \overline{k}(\Omega)\overline{X}(\Omega)$, em que já se considera a rigidez complexa como dependente da frequência (visto que o isolador é viscoelástico), tem-se, progressivamente, que

$$\overline{F}(\Omega) - \overline{k}(\Omega)\overline{X}(\Omega) = -m\Omega^2\overline{X}(\Omega) \quad (3.4)$$

$$\overline{F}(\Omega) = -m\Omega^2\overline{X}(\Omega) + \overline{k}(\Omega)\overline{X}(\Omega) \quad (3.5)$$

$$\overline{F}(\Omega) = [-m\Omega^2 + \overline{k}(\Omega)]\overline{X}(\Omega). \quad (3.6)$$

Sabe-se também que, no domínio da frequência,

$$\overline{F_T}(\Omega) = \overline{k}(\Omega)\overline{X}(\Omega). \quad (3.7)$$

onde $\overline{F_T}(\Omega)$ é a força transmitida para o meio no qual o equipamento está montado, no domínio da frequência.

Assim, pode-se definir a transmissibilidade complexa \overline{T} como sendo a razão entre as forças $\overline{F_T}$ e \overline{F} . A partir das equações 3.6 e 3.7, obtém-se

$$\overline{T}(\Omega) = \frac{\overline{F_T}(\Omega)}{\overline{F}(\Omega)} = \frac{\overline{k}(\Omega)}{\overline{k}(\Omega) - m\Omega^2} \quad (3.8)$$

onde $\overline{T}(\Omega)$ é uma função complexa dependente da frequência.

A partir da rigidez complexa dada pela equação 2.4, em que também a dependência em temperatura é considerada, tem-se que

$$\overline{T}(\Omega, T) = \frac{\overline{k}(\Omega, T)}{\overline{k}(\Omega, T) - m\Omega^2} = \frac{LE_c(\Omega, T)}{LE_c(\Omega, T) - m\Omega^2}. \quad (3.9)$$

Como $E_c(\Omega, T) = E(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)]$, então a equação 3.9 é tal que

$$\overline{T}(\Omega, T) = \frac{LE(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)]}{LE(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)] - m\Omega^2}. \quad (3.10)$$

Rearranjando a equação 3.10, decorre, sucessivamente, que

$$\overline{T}(\Omega, T) = \frac{LE(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)]}{LE(\Omega, T) \left[1 - \frac{m\Omega^2}{LE(\Omega, T)} + i\eta(\Omega, T) \right]} \quad (3.11)$$

$$\overline{T}(\Omega, T) = \frac{[1 + i\eta(\Omega, T)]}{\left[1 - \frac{m\Omega^2}{LE(\Omega, T)} + i\eta(\Omega, T) \right]}. \quad (3.12)$$

Seja agora Ω_n definida como a frequência natural ou característica do sistema, de forma tal que

$$\Omega_n^2 = \frac{LE(\Omega_n, T)}{m}. \quad (3.13)$$

Definem-se ainda

$$r(\Omega, T) = \frac{E(\Omega_n, T)}{E(\Omega, T)} \quad (3.14)$$

e

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{\Omega_n}. \quad (3.15)$$

Levando as equações 3.13, 3.14 e 3.15 na equação 3.12, resulta que, de

$$\bar{T}(\Omega, T) = \frac{[1 + i\eta(\Omega, T)]}{\left\{ \left[1 - \frac{E(\Omega_n, T)}{E(\Omega, T)} \frac{m\Omega^2}{LE(\Omega_n, T)} \right] + i\eta(\Omega, T) \right\}} \quad (3.16)$$

obtém-se

$$\bar{T}(\Omega, T) = \frac{[1 + i\eta(\Omega, T)]}{\{[1 - r(\Omega, T)\varepsilon^2] + i\eta(\Omega, T)\}}. \quad (3.17)$$

Dessa forma, o módulo da transmissibilidade acima apresentado é

$$T(\Omega, T) = |\bar{T}(\Omega, T)| = \sqrt{\frac{1 + [\eta(\Omega, T)]^2}{[1 - r(\Omega, T)\varepsilon^2]^2 + [\eta(\Omega, T)]^2}}. \quad (3.18)$$

O módulo da transmissibilidade, determinado acima para o caso de isolamento de força, é idêntico quando se analisa o caso de isolamento de movimento. Esse módulo quantifica, num caso, o percentual de amplitude da força excitadora que é transmitida para o meio e, no outro caso, o percentual da amplitude de movimento que passa para o equipamento.

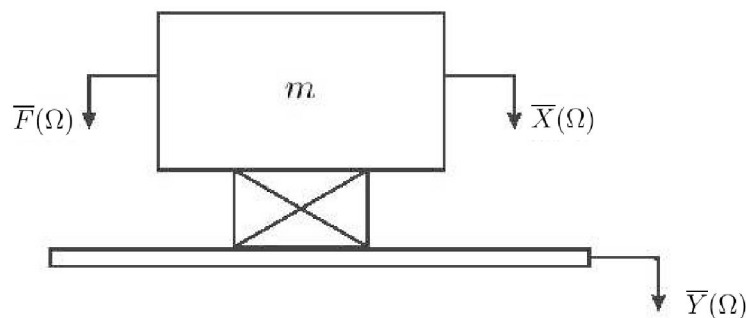
3.1.2 Impedância Infinita versus Impedância Finita

O modelo de isolamento descrito na seção anterior considera uma impedância infinita na base, ou seja, a massa do equipamento e o elemento resiliente de material viscoelástico estão colocados sobre um bloco de concreto, por exemplo. Mas o que acontece com a transmissibilidade quando a impedância é finita? Esta subseção, fazendo uma breve digressão, aborda tal questão.

A impedância é definida como a razão entre a força aplicada na base e a velocidade desta. Portanto, se o sistema mecânico está sobre um bloco de concreto massivo, por maior que seja a força realizada na base, a velocidade será muito pequena, isto é, uma impedância muito alta resultará. Agora, caso o sistema esteja montado sobre uma bancada de madeira, por exemplo, a impedância será finita, com força aplicada na base e velocidade desta a serem consideradas. Essa impedância finita poderia ser medida através de um experimento.

Seja o sistema conforme esquematizado na Figura 7, onde a impedância da base é finita. Considera-se, neste sistema, as forças e deslocamentos já representados no domínio da frequência. A exposição subsequente segue a linha de Snowdon (1968).

Figura 7: Sistema sobre base de impedância finita.



FONTE: O Autor.

Da definição de impedância, tem-se que

$$\overline{Z}(\Omega) = \frac{\overline{F}_b(\Omega)}{\overline{V}(\Omega)} \quad (3.19)$$

onde $\overline{F}_b(\Omega)$ é a força aplicada sobre a base, $\overline{V}(\Omega)$ a velocidade da mesma e $\overline{Z}(\Omega)$ a impedância. Sabe-se que a relação entre a velocidade e o deslocamento da base $\overline{Y}(\Omega)$ é dada por $\overline{V}(\Omega) = i\Omega\overline{Y}(\Omega)$. Então,

$$\overline{Z}(\Omega) = \frac{\overline{F}_b(\Omega)}{i\Omega\overline{Y}(\Omega)} \quad (3.20)$$

e, portanto,

$$\overline{F}_b(\Omega) = i\Omega\overline{Y}(\Omega)\overline{Z}(\Omega). \quad (3.21)$$

A força $\overline{F}_b(\Omega)$, no caso, nada mais é que o produto da rigidez do isolador (dependente da frequência e da temperatura) pela deformação do mesmo, ou seja,

$$\overline{F}_b(\Omega) = \overline{k}(\Omega, T)[\overline{X}(\Omega) - \overline{Y}(\Omega)]. \quad (3.22)$$

onde $\overline{X}(\Omega)$ é o deslocamento da massa, como se vê na Figura 7.

Igualando as equações 3.21 e 3.22, decorre que

$$\overline{k}(\Omega, T)[\overline{X}(\Omega) - \overline{Y}(\Omega)] = i\Omega\overline{Y}(\Omega)\overline{Z}(\Omega). \quad (3.23)$$

Já para o corpo de massa m , pela 2ª lei de Newton, tem-se que

$$-\Omega^2 m \overline{X}(\Omega) = \overline{F}(\Omega) - \overline{k}(\Omega, T)[\overline{X}(\Omega) - \overline{Y}(\Omega)]. \quad (3.24)$$

Manipulando a equação 3.23, obtém-se

$$\overline{X}(\Omega) = \frac{[i\Omega\overline{Z}(\Omega) + \overline{k}(\Omega, T)]\overline{Y}(\Omega)}{\overline{k}(\Omega, T)}. \quad (3.25)$$

Levando a equação 3.25 na equação 3.24, resulta que

$$\overline{Y}(\Omega) = \frac{\overline{k}(\Omega, T)\overline{F}(\Omega)}{\{-\Omega^2 m \overline{k}(\Omega, T) + i\Omega\overline{Z}(\Omega)[\overline{k}(\Omega, T) - \Omega^2 m]\}}. \quad (3.26)$$

Caso a parte real de $\overline{k}(\Omega, T)$ seja elevada (ou seja, no caso de conexão rígida entre equipamento e base), obtém-se

$$\overline{Y}_r(\Omega) = \frac{\overline{F}(\Omega)}{\{[-\Omega^2 m + i\Omega\overline{Z}(\Omega)]\}}. \quad (3.27)$$

Ao se estabelecer a razão entre as equações 3.26 e 3.27, relacionando a vibração na base face a uma conexão flexível com tal vibração associada a uma conexão rígida, chega-se a

$$\overline{R}(\Omega, T) = \frac{\overline{Y}(\Omega)}{\overline{Y}_r(\Omega)} = \frac{\overline{k}(\Omega, T)}{\overline{k}(\Omega, T) - \frac{\Omega^2 m}{1 + \frac{i\Omega m}{\overline{Z}(\Omega)}}}. \quad (3.28)$$

Essa razão é conhecida como razão de resposta (Snowdon, 1968) e pode ser utilizada para o cálculo da transmissibilidade quando a impedância na base for finita. Caso a impedância na base $\overline{Z}(\Omega)$ seja infinita, a equação 3.28 se reduz a

$$\overline{R}_\infty(\Omega, T) = \frac{\overline{k}(\Omega, T)}{\overline{k}(\Omega, T) - \Omega^2 m}. \quad (3.29)$$

Ou seja, para impedância infinita na base, as expressões da razão de resposta, dada pela equação 3.29, e da transmissibilidade, dada pela equação 3.9, são idênticas. A próxima subseção retorna com a formulação matemática da subseção 3.1.1 avançando para a metodologia empregada para a obtenção das dimensões dos dispositivos de controle.

3.1.3 Elemento Viscoelástico Cilíndrico

No isolamento de vibração do sistema com um grau de liberdade aqui tratado (vide Figura 6), o elemento resiliente (viscoelástico) do isolador equivalente utilizado tem forma cilíndrica. Assim sendo nesta subseção, é apresentada a formulação para a obtenção das dimensões deste elemento. Refere-se a isolador equivalente pelo fato de poder haver mais de um, agindo todos eles em paralelo.

A partir da equação 3.18 e da transmissibilidade desejada (T_d) no sistema de isolamento, pode-se determinar a frequência natural Ω_n do sistema isolado, ao resolver-se a seguinte equação não linear:

$$T(\Omega_e, T) - T_d = 0 \quad (3.30)$$

onde Ω_e é a frequência de uma certa excitação harmônica de interesse no controle.

De posse da frequência natural Ω_n , obtém-se o fator de projeto a partir da equação 3.13, de modo que

$$L = \frac{\Omega_n^2 m}{E(\Omega_n, T)}. \quad (3.31)$$

Caso o isolador equivalente corresponda a n isoladores atuando em paralelo, o fator de projeto associado ao elemento resiliente cilíndrico de cada isolador é dado por

$$L = \frac{\Omega_n^2 m}{nE(\Omega_n, T)} \quad (3.32)$$

onde se enfatiza que, tal como na equação 3.31, $E(\Omega_n, T)$ é o módulo dinâmico (real) de elasticidade na frequência Ω_n e na temperatura de trabalho T .

Salienta-se que, no caso de n isoladores em paralelo, a parte real da rigidez complexa conjunta é dada por (vide equação 2.4)

$$k(\Omega, T) = nLE(\Omega, T). \quad (3.33)$$

Para elementos resilientes cilíndricos sob compressão, conforme antecipado na seção 1.1, o fator de projeto L pode ser expresso por

$$L = \frac{A}{h} s_c \quad (3.34)$$

onde A é a área da seção transversal do elemento, h a altura e s_c um outro fator, conhecido como fator de forma. O fator de forma, no caso, é dado por (Nashif et al., 1985)

$$s_c = 1 + \beta \left(\frac{A}{A'} \right)^2, \quad (3.35)$$

onde A' é a área não carregada do elemento resiliente e β uma constante adimensional, que é aproximadamente igual a 2,0 para elastômeros sem enchimento e a 1,5 para elastômeros com enchimento (por exemplo, com negro de fumo).

No caso de elementos cilíndricos, $A = \pi d^2/4$ e $A' = 2\pi r h = \pi d h$, onde d é o diâmetro da seção transversal. Assim,

$$s_c = 1 + \beta \left(\frac{d}{4h} \right)^2. \quad (3.36)$$

Rivin (2003) observa que a equação 3.36 é válida enquanto a razão d/h for menor que aproximadamente 10.

Levando a equação 3.36 na equação 3.34, obtém-se

$$L = \frac{\pi d^2}{4h} \left[1 + \beta \left(\frac{d}{4h} \right)^2 \right]. \quad (3.37)$$

ou ainda

$$\pi\beta d^4 + 16\pi h^2 d^2 - 64Lh^3 = 0. \quad (3.38)$$

Tendo valor de L , determinado anteriormente, a equação acima pode ser resolvida para d desde que o valor de h seja conhecido. Há duas alternativas. A primeira é fazer δ , a deflexão estática do sistema de interesse, igual a 10% de h , o que é limite para que a relação carga-deflexão se mantenha na faixa linear (Rivin, 2003). Assim, tem-se, para o sistema isolado, que

$$\frac{P}{\delta} = \frac{mg}{0,1h} = k = LE \quad (3.39)$$

e, portanto, o valor de h é dado por

$$h = \frac{mg}{0,1LE} \quad (3.40)$$

onde E é o módulo de elasticidade estático.

A segunda alternativa é estabelecer um valor arbitrário entre d e h , tal que $d/h < 10$. Para $d/h = a$,

$$h = \frac{d}{a} \quad (3.41)$$

onde a é conhecida como razão de espectro. Nesse caso, pode-se mostrar, das equações 3.38 e 3.42 que

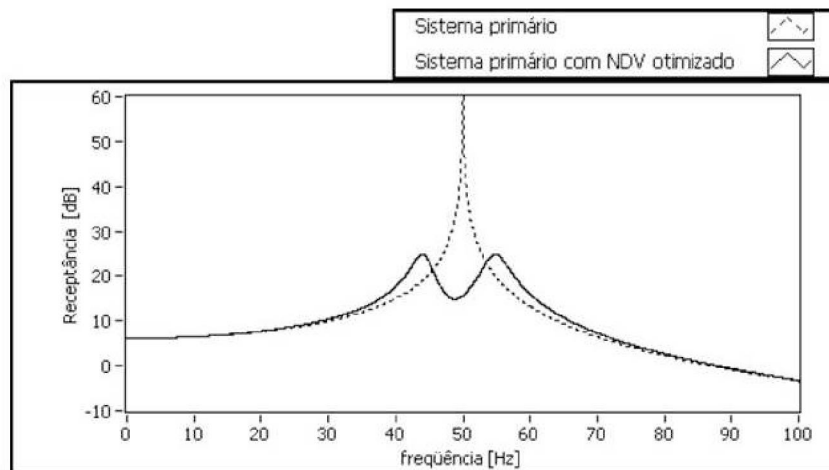
$$d = \frac{64L}{\pi a(\beta a^2 + 16)}. \quad (3.42)$$

Ambas as alternativas apresentadas acima permitem obter as dimensões de um elemento viscoelástico cilíndrico, seja ele de um isolador ou de um neutralizador. Parte dessa metodologia, portanto, será utilizada mais adiante para o cálculo das dimensões do elemento resiliente de um neutralizador dinâmico viscoelástico.

3.2 Neutralização de Vibrações

Um neutralizador dinâmico, ou absorvedor dinâmico, de vibrações é um sistema ressonante que quando devidamente projetado e fixado em um sistema mecânico qualquer reduz o nível de vibração deste, como ilustrado na Figura 8 para um sistema primário com um grau de liberdade.

Figura 8: FRF para um sistema linear com NDV.



FONTE: Bavastri et al. (2014).

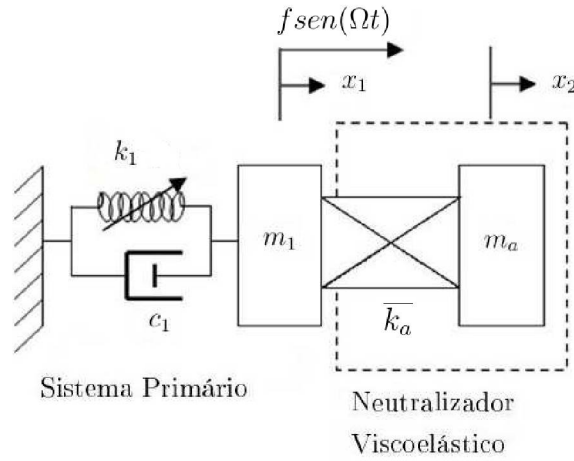
Na Dinâmica Estrutural, a construção da Função Resposta em Frequência (FRF) observada na Figura 8 é o método mais comum para a visualização das relações entre entrada e saída do sistema, fornecendo informações tais como ressonância, antirressonância, densidade modal e fase. Esta técnica é o primeiro passo em um teste de vibrações, sendo que a maioria dos analisadores comerciais fornecem a funcionalidade da FRF. A função resposta em frequência (FRF) é uma função que relaciona o sinal de saída (resposta) do sistema com o sinal de entrada (excitação) correspondente no domínio da frequência. São exemplos de FRF's para sistemas com um grau de liberdade: receptância, mobilidade e inertância.

A fim de obter os parâmetros ótimos do neutralizador dinâmico viscoelástico que irá reduzir a resposta em frequência do sistema primário linear na banda de frequência de interesse, especifica-se o modelo matemático do sistema composto (sistema primário mais neutralizador) e, em seguida, utiliza-se um método numérico de otimização não linear. Esses tópicos são apresentados a seguir.

3.2.1 Modelo Matemático do Sistema Composto

Apresenta-se, para os fins desejados, o modelo de dois graus de liberdade. Este modelo equivalente representa o sistema primário e o neutralizador dinâmico viscoelástico, sendo ambos os sistemas de comportamento linear. A Figura 9 representa o modelo a ser estudado, sendo a excitação harmônica aplicada no sistema primário.

Figura 9: Modelo do sistema composto.



FONTE: O Autor.

Tem-se, na Figura 9, as seguintes grandezas:

m_1 é a massa do sistema primário;

c_1 é a constante de amortecimento do sistema primário;

k_1 é a rigidez do sistema primário;

x_1 é a coordenada generalizada do sistema primário;

m_a é a massa do neutralizador;

\bar{k}_a é a rigidez complexa do elemento do neutralizador;

x_2 é a coordenada generalizada do neutralizador;

f é a amplitude da excitação harmônica aplicada no sistema primário.

Acima, a rigidez complexa do neutralizador é dada, de forma estendida, por

$$\bar{k}_a(\Omega, T) = LE_c(\Omega, T), \quad (3.43)$$

tal como nos isoladores.

A inserção do neutralizador ao sistema vibrante (sistema primário) aumenta o número de coordenadas necessárias para descrever o sistema modificado (sistema primário mais neutralizador). Uma maneira de se representar o modelo do sistema composto em função apenas da coordenada do sistema primário é considerando que a ação do neutralizador corresponde à ação de uma mola complexa, cuja rigidez complexa equivalente possui componentes real e imaginária. Lopes (1998) vislumbra a simplicidade desta formulação, face a outras abordagens como em Espíndola e Silva (1992) e Espíndola e Bavastri (1995), que empregaram elementos equivalentes de massa e amortecedor.

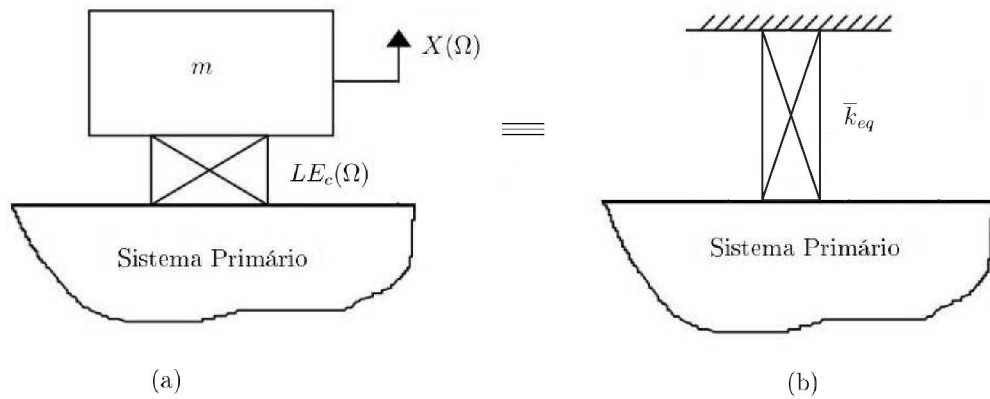
Assim sendo, o neutralizador simples com um grau de liberdade representado na Figura 10.a é equivalente à mola complexa de rigidez complexa Figura 10.b. Neutralizador e mola são ditos dinamicamente equivalentes.

A partir do desenvolvimento do diagrama de corpo livre do sistema apresentado na Figura 10.a, e após algumas manipulações algébricas, chega-se à equação da rigidez dinâmica na base do neutralizador, dada por (para mais detalhes, ver Préve, 2015; Lopes, 1998):

$$\bar{k}_b(\Omega, T) = \frac{LE(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)](-m_a\Omega^2)}{LE(\Omega, T)[1 + i\eta(\Omega, T)] + (-m_a\Omega^2)}. \quad (3.44)$$

onde se usa o fato de que $E_c(\Omega, T) = E(\Omega, T)[1 + i\eta_E(\Omega, T)]$ (vide equação 2.9) e faz-se $\eta_E = \eta$, por simplicidade.

Figura 10: Sistemas equivalentes.



FONTE: O Autor.

Da Figura 10.b, a rigidez dinâmica equivalente da mola é tal que (Lopes, 1998)

$$\bar{k}_{eq}(\Omega, T) = (k_{eq})_r(\Omega, T) + i(k_{eq})_i(\Omega, T). \quad (3.45)$$

onde $(k_{eq})_r(\Omega, T)$ e $(k_{eq})_i(\Omega, T)$, são, respectivamente, as componentes real e imaginária da rigidez complexa da mola equivalente.

Portanto, com base na equação 3.44, as componentes da mola viscoelástica equivalente são dadas por

$$(k_{eq})_r(\Omega, T) = \frac{m_a LE(\Omega, T) \{m_a \Omega^2 - LE(\Omega, T)[1 + \eta(\Omega, T)^2]\} \Omega^2}{[(m_a \Omega^2 - LE(\Omega, T))^2 + [LE(\Omega, T)\eta(\Omega, T)]^2} \quad (3.46)$$

e

$$(k_{eq})_i(\Omega, T) = \frac{m_a^2 LE(\Omega, T)\eta(\Omega, T)\Omega^4}{[m_a \Omega^2 - LE(\Omega, T)]^2 + [LE(\Omega, T)\eta(\Omega, T)]^2}. \quad (3.47)$$

Segundo Lopes (1998), as duas componentes da mola equivalente contêm todos os parâmetros dinâmicos do modelo original. Isso também é observado nos elementos equivalentes de Espíndola e Silva (1992) e Espíndola e Bavastri (1995).

As equações 3.46 e 3.47 podem ser melhor adequadas para uso, lançando-se mão, tal como no caso de isolamento, das seguintes definições:

$$\Omega_a^2 = \frac{LE(\Omega_a, T)}{m_a} \quad (3.48)$$

$$r(\Omega, T) = \frac{E(\Omega_a, T)}{E(\Omega, T)} \quad (3.49)$$

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{\Omega_a} \quad (3.50)$$

Acima, Ω_a é a frequência natural ou característica do neutralizador, considerando, de forma isolada, como um sistema com um grau de liberdade.

Levando as definições acima nas equações 3.46 e 3.47, passa-se a ter

$$(k_{eq})_r(\Omega, T) = \frac{m_a r(\Omega, T) \Omega_a^2 \{\varepsilon^2 - r_a(\Omega, T)[1 + \eta(\Omega, T)^2]\} \varepsilon^2}{[\varepsilon^2 - r(\Omega, T)]^2 + [r(\Omega, T)\eta(\Omega, T)]^2} \quad (3.51)$$

e

$$(k_{eq})_i(\Omega, T) = \frac{m_a r(\Omega, T) \Omega_a^2 \eta(\Omega, T) \varepsilon^4}{[\varepsilon^2 - r(\Omega, T)]^2 + [r(\Omega, T)\eta(\Omega, T)]^2}. \quad (3.52)$$

As expressões acima evidenciam Ω_a , a frequência natural do neutralizador.

Para um sistema primário com um grau de liberdade, contendo um neutralizador dinâmico simples, modelado como exposto acima, a FRF do sistema neutralizado é dada por

$$H(\Omega, T) = \frac{1}{-\Omega^2 m_1 + i\Omega c_1 + (k_1 + \bar{k}_{eq})} \quad (3.53)$$

onde m_1 , c_1 e k_1 são os parâmetros do sistema primário, \bar{k}_{eq} é a rigidez complexa equivalente, dada pelas equações 3.51 e 3.52, e $H(\Omega)$ é a receptância do sistema neutralizado (sistema composto equivalente).

A seguir é apresentada a técnica de otimização não linear utilizada no projeto de neutralização para a obtenção da frequência ótima do neutralizador.

3.2.2 Técnica de Otimização Não Linear

Especificado o modelo matemático do sistema composto (sistema primário mais neutralizador), um método numérico de otimização não linear pode ser utilizado a fim de se obter os parâmetros ótimos do neutralizador dinâmico viscoelástico, que efetuar a ação desejada de controle passivo. Ou seja, reduzir a resposta vibratória do sistema primário numa faixa de frequência de interesse.

Uma técnica de otimização não linear é um método numérico de otimização, utilizado para determinar os parâmetros ótimos após um modelo matemático ser pré-estabelecido. Ela tem o objetivo de identificar mínimos ou máximos de uma determinada função, podendo ou não haver restrições associadas. Pode-se apresentar um problema de otimização como (Arora, 2004)

$$\min f(x)$$

$$\begin{aligned}
&\text{sendo } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n \\
&\text{sujeita a restrições:} \\
&h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \\
&g_j(x) \geq 0 \quad j = m + 1, \dots, p.
\end{aligned}$$

Ou seja, deseja-se minimizar a função $f(x)$, chamada aqui de função objetivo, sendo x o vetor de projeto e $h_i(x)$ e $g_j(x)$ a i -ésima e j -ésima restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. A região viável que o projeto pode assumir é determinada pelo conjunto de pontos x na interseção das restrições acima mencionadas.

A fim de encontrar o ponto ótimo da função $f(x)$ no espaço n dimensional, existem técnicas que determinam uma direção de busca, a partir de um ponto qualquer de partida. Uma vez que essa direção é pré-estabelecida, deve-se aplicar uma técnica unidimensional para a definição do tamanho do passo. Os dois processos anteriores são iterativos. Os métodos para direção de busca podem ou não utilizar a informação da derivada, assim como as técnicas unidimensionais.

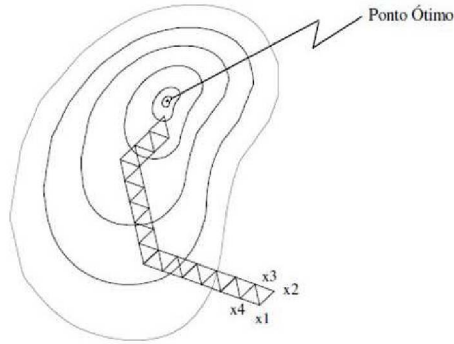
No presente trabalho, a função a ser otimizada é, em geral, multidimensional e não determinada analiticamente. A técnica adotada é a apresentada por Nelder e Mead em 1965 (Himmelblau, 1972; Bazaraa e Shetty, 1979), chamada "*Nelder and Mead Method*" e implementada através da função *fminsearch* do MatLab . Essa técnica é multidimensional e não utiliza informação da derivada da função (Nascimento e Yoneyama, 1997).

Conhecido como método do poliedro flexível ou simplex, esse método faz uso de um poliedro de $n + 1$ vértices construído para $x \in \mathbb{R}^n$. Na procura do mínimo, o valor da função é encontrado para cada vértice e o maior valor é abandonado. Ou seja, com o valor da função em cada ponto, descobre-se o pior ponto. Em seguida, é calculado o centróide da face oposta a esse pior ponto e há um rebatimento desse ponto, fazendo uma reflexão baseada no centro geométrico do poliedro.

Esse procedimento é repetido até que um critério de convergência seja atingido, que pode ser a norma da soma dos vetores de pontos do poliedro atual, com a exceção do pior ponto. Assim, o ponto de mínimo é extraído da média aritmética dos pontos do poliedro. A Figura 11 mostra um gráfico com as curvas de nível de uma função qualquer e a aplicação do método nos moldes descritos acima para uma função bidimensional. Outras operações, além da reflexão podem ser realizadas com a finalidade da deformação do poliedro em cada iteração, sendosão elas a expansão, a redução e a contração.

Ainda que seja um método rápido de programar, tem a desvantagem da lentidão de execução quando comparado a métodos que utilizam informação da derivada. Esse método concede excelentes resultados mas depende muito do ponto inicial, uma vez que estaciona no primeiro ponto de ótimo local que encontra.

Figura 11: Método de Nelder e Mead.



FONTE: Bavastri (1997).

3.2.3 Projeto Ótimo do Sistema de Controle

No controle do sistema primário através de um neutralizador dinâmico viscoelástico com o auxílio de uma técnica de otimização não linear, o objetivo é obter o valor da frequência natural do neutralizador que, quando acoplado ao sistema primário, conduz à menor amplitude de resposta possível. Nesse sentido, utiliza-se o modelo matemático do sistema composto definido na seção 3.2.1.

A função objetivo utilizada nesse processo de otimização é a norma de *Frobenius* da FRF $H(\Omega, x)$, ao longo de uma faixa de frequência de interesse, ou seja,

$$f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = \|H(\Omega, x)_{\Omega_i \leq \Omega \leq \Omega_f}\|_F, \quad (3.54)$$

onde $\|\dots\|_F$ representa a norma de *Frobenius*, Ω_i e Ω_f são os limites inferior e superior da faixa de frequência de interesse, respectivamente, e x é o vetor de projeto, que, neste caso, é definido como a frequência natural do neutralizador (Ω_a), isto é,

$$x = \Omega_a.$$

O problema padrão de otimização para controle do sistema compreende

$$\begin{aligned} & \min f_{obj}(x) \\ & f_{obj}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = \|H(\Omega, x)_{\Omega_i \leq \Omega \leq \Omega_f}\|_F. \end{aligned}$$

Portanto, o objetivo é minimizar, tanto quanto possível, a amplitude da FRF do sistema neutralizado (sistema composto equivalente). O procedimento consiste na busca de um vetor x (frequência ótima) que corresponda ao menor valor da amplitude da FRF do sistema neutralizado, para a faixa de frequência considerada $[\Omega_i, \Omega_f]$. As restrições de igualdade e desigualdade não são, no presente trabalho, empregadas. Posteriormente à determinação da frequência ótima do neutralizador, é possível calcular o fator de projeto L correspondente e, conseqüentemente as dimensões do elemento resiliente do dispositivo, como explicado a seguir.

Determinada a frequência ótima do neutralizador, Ω_a , obtém-se o fator de projeto da equação 3.48, de modo que

$$L = \frac{m_a \Omega_a^2}{E(\Omega_a, T)}, \quad (3.55)$$

equação que é similar à equação 3.31, posto que o neutralizador viscoelástico, no caso, é um sistema com um grau de liberdade (vide Figura 9). Como se considera que o elemento resiliente do neutralizador é cilíndrico, a determinação de suas dimensões segue a metodologia exposta a partir da equação 3.34. Observa-se que m_a é, via de regra, pré-definida entre 2,5% e 10% da massa do sistema primário cuja vibração se deseja controlar (Den Hartog, 1956; Bavastri, 1997).

4 INFERÊNCIA BAYESIANA

A inferência estatística é uma ferramenta de investigação científica que retira conclusões sobre uma determinada população a partir de uma amostra dessa. Segundo Cox (1958), essas conclusões incorporam a incerteza das informações sujeitas a aleatoriedade. As abordagens mais comuns na inferência estatística são a inferência clássica e a inferência bayesiana. A inferência clássica tira conclusões sobre a verossimilhança das observações de forma condicional a uma determinada hipótese, enquanto que, na inferência bayesiana, avalia-se a chance de uma hipótese ser verdadeira de forma condicional aos dados que foram observados (Jackman, 2009).

A abordagem bayesiana baseia-se no teorema de Bayes, enunciado por Thomas Bayes e divulgado em 1763 (Bayes e Price, 1763). Já a interpretação bayesiana foi desenvolvida posteriormente, em 1814, por Pierre-Simon Laplace (Laplace, 1951). A abordagem bayesiana considera que um parâmetro deve ser estimado como uma variável aleatória, sendo que a ideia principal é combinar a probabilidade com informação prévia, para produzir as funções estimadas de densidade de probabilidade associadas a cada parâmetro (Kaipio e Somersalo, 2005). Em outras palavras, o método consiste em realizar inferência incorporando o conhecimento anterior do pesquisador a respeito de um parâmetro de interesse θ , ou de um fenômeno, combinando-o com dados observados, através de experimentos ou medições, de forma a atualizar o conhecimento inicial.

Essas medições costumam ter um nível de aleatoriedade por conta de influências desconhecidas que podem afetá-las. Dessa forma, os dados científicos costumam ter um grau de ruído em seu valor, que pode ser quantificado com o uso de probabilidade no modelo de inferência estatística (Gelman et al., 2004).

O conhecimento prévio é retratado na chamada distribuição a priori do parâmetro, denotada por $p(\theta)$. Após observar um conjunto de dados y , crenças anteriores são atualizadas e a incerteza sobre o parâmetro é representada pela distribuição a posteriori $p(\theta|y)$. A função de verossimilhança resume a informação referente aos dados observados e é denotada por $p(y|\theta)$, onde y e θ são tratados como variáveis aleatórias. A aplicação do teorema de Bayes proporciona realizar inferência sobre θ por intermédio da distribuição a posteriori $p(\theta|y)$, que representa a resposta gerada pela inferência bayesiana e revela a informação completa sobre os valores dos parâmetros, indicando a credibilidade relacionada a cada combinação de valores dos parâmetros.

De acordo com Kruschke (2015), a análise de inferência bayesiana pode ser contemplada a partir dos cinco passos seguintes:

1. Apontar os dados relevantes para as questões do estudo científico. Deve-se ter bem esclarecidas as variáveis de medição e a escala dos dados medidos.
2. Determinar um modelo descritivo dos dados relevantes. A forma matemática e os

parâmetros correspondentes devem ser significativos e apropriados para os propósitos teóricos da análise.

3. Definir as distribuições a priori dos parâmetros do modelo.
4. Aplicar a inferência bayesiana para realocar as probabilidades através dos valores dos parâmetros e então interpretar as distribuições a posteriori obtidas, contemplando as questões significativas da pesquisa, isso considerando que o modelo descreve bem os dados experimentais, ou observados.
5. Aferir se as predições a posteriori descrevem os dados com precisão aceitável. Portanto, uma verificação da predição a posteriori deve ser realizada. Caso o modelo não descreva bem os dados, considera-se o uso de outro modelo.

4.1 Distribuições a Priori

Uma distribuição a priori retrata, através de experimentos, medições ou observações, um determinado parâmetro, antes de estimá-lo. Esses parâmetros são chamados de hiperparâmetros, a fim de diferenciá-los dos parâmetros do modelo. As distribuições a priori podem depender de um ou mais hiperparâmetros, de acordo com o modelo proposto para descrever os dados.

Há duas categorias gerais de prioris, informativas e não informativas (Gill, 2009). A diferença entre essas categorias tem um caráter relativo e não existe uma priori que seja totalmente não informativa. Segundo Gill (2009), os limites entre essas categorias não são bem estabelecidos, logo esta classificação pode ser considerada artificial.

A priori informativa consiste, em teoria, na distribuição a priori que incorpora as informações que se tem em relação ao parâmetro de interesse θ . Isto é, em um modelo de inferência bayesiana, são dados adicionais que participam do modelo. Quando tem-se um modelo probabilístico atual similar a um modelo anterior, e o modelo atual "atualiza" o anterior por intermédio dos dados, a distribuição a posteriori de θ do modelo anterior será utilizada como distribuição a priori do modelo atual. Nesse caso, o ajuste do modelo probabilístico não é realizado perante uma situação de completa ignorância e apenas com base nos dados atuais, mas sim leva em conta os resultados cumulativos de todos os dados, passados e presentes.

Uma priori fracamente informativa, ou vaga, é caracterizada quando a priori não é atualizada a partir da posteriori obtida no modelo anterior. Entretanto, ela contém informação suficiente sobre o modelo, a fim de evitar resultados contraditórios sobre o conhecimento desse. A seleção de uma priori desse tipo é feita com cuidado, uma vez que ela deve ter informação suficientemente adequada, para que os dados atuais possam ajudar de forma efetiva na resposta final. Uma priori fracamente informativa evita o uso de informações que realmente não existem.

Há também as *prioris* conjugadas, que são muito informativas. Pode-se selecionar uma distribuição que é conjugada com a verossimilhança de forma que, ao se realizar essa combinação, se obtenha uma distribuição a posteriori da mesma família. O uso dessas *prioris* é sugerido sempre que possível e é pertinente, devido à sua conveniência computacional.

Utiliza-se a priori não informativa, via de regra, quando o pesquisador não tem conhecimento ou informação prévia suficiente sobre a distribuição dos dados de estudo. Contudo, as *prioris* não informativas nem sempre são utilizadas apenas quando existe um estado total de ignorância sobre os dados. Elas também podem ser uma decisão de pesquisa à qual pode-se recorrer no caso em que não se tenha informações suficientes para se elicitar *prioris* adequadas e considera-se que distribuições subjetivas sejam mais apropriadas ao modelo (PAULINO et al, 2003). Neste caso os dados observados podem contribuir com peso maior no resultado final.

Existem alguns métodos para elicitar *prioris* não informativas como Bayes-Laplace, o método de Jeffreys, o método de Box Tiao e o método da entropia máxima (Kass e Wasserman, 1996; Paulino et al., 2003). Emprega-se a distribuição a priori não informativa com o intuito de que os dados observados contribuam mais na distribuição a posteriori.

As *prioris* são uma maneira de reunir conhecimento humano existente, quantitativo ou qualitativo, na especificação estatística. Efetivamente, é comum ver uma mistura das categorias de priori citadas acima, combinando questões de conhecimento prévio, adequação matemática e aspiração de não interferir nas conclusões finais com a influência da escolha da priori. De acordo com Gill (2009), vários críticos destacam a natureza subjetiva da priori, contudo todos os modelos estatísticos envolvem escolhas subjetivas.

4.2 Função de Verossimilhança e Princípio da Verossimilhança

A função de verossimilhança possibilita que os parâmetros desconhecidos sejam estimados com base nos valores observados para variáveis aleatórias definidas no experimento. Assim, a função de verossimilhança é contrária a uma função densidade de probabilidade, que nos permite calcular probabilidades para a variável aleatória com base em parâmetros conhecidos.

Cria-se uma função de verossimilhança com base em uma amostra aleatória $y = (y_1, \dots, y_n)$, onde $i = 1, \dots, n$ e cada y_i tem distribuição $p(y_i|\theta)$. Sendo assim, ela é uma função do parâmetro desconhecido θ . Matematicamente, tem-se que

$$L(\theta; y_1, \dots, y_n) = p(y_1, \dots, y_n|\theta), \quad (4.1)$$

$\forall \theta$ e y_i .

Logo, a função de verossimilhança de θ tem a formulação matemática idêntica à densidade de probabilidade da variável resposta y . Destaca-se que a variável de interesse na função de verossimilhança é o parâmetro θ , e não y (Press, 2003). Logo, a função de verossimilhança não é uma probabilidade e não obedece às propriedades da probabilidade.

A fim de ilustrar a diferença entre a função de verossimilhança e uma função densidade de probabilidade, forma-se um exemplo de Press (2003). Seja uma distribuição binomial, onde o número de sucessos é dado por $r = \sum_{i=1}^n Y_i$, em n ensaios independentes de Bernoulli, sendo o resultado Y_i do i -ésimo ensaio tal que $Y_i \in [0, 1]$. A função densidade de probabilidade correspondente é dada por

$$p(r|\theta) = \binom{n}{r} \theta^r (1 - \theta)^{n-r}, \quad r = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Se $\binom{n}{r}$ for omitido na equação 4.2, tem-se a função de verossimilhança

$$L(\theta|r) = \theta^r (1 - \theta)^{n-r}, \quad (4.3)$$

onde o coeficiente da distribuição binomial não tem interesse para a inferência bayesiana e o foco dirige-se apenas a θ . Vislumbra-se que $L(\theta|r)$ e $p(r|\theta)$ divergem apenas para constante de proporcionalidade $\binom{n}{r}$.

Já o princípio da verossimilhança fundamenta-se quando se deseja fazer inferências sobre um parâmetro θ , onde dois conjuntos Y_1 e Y_2 de dados observados relacionados a esse parâmetro θ têm funções de verossimilhança proporcionais uma à outra, e a constante de proporcionalidade não depende de θ . Logo, eles devem gerar conclusões inferenciais idênticas sobre tal parâmetro. Segundo Barnett (1999), o princípio da verossimilhança possui duas versões, a versão fraca, onde Y_1 e Y_2 aparecem de um modelo de probabilidade comum, e a versão forte, onde os modelos de probabilidade são distintos, mas os conjuntos são relacionados a um parâmetro e um espaço paramétrico em comum.

De acordo com Berger e Wolpert (1988), este princípio sustenta que todas as informações necessárias para a inferência do parâmetro θ , que estão incluídas nos dados experimentais observados sobre este parâmetro desconhecido, estão disponíveis a partir da função de verossimilhança. Aderir ao princípio da verossimilhança significa concordar que as inferências são condicionais aos dados observados e que a função de verossimilhança

é parametrizada pelos dados (Rossi et al., 2005). Vale ressaltar que a maneira pela qual o experimento foi realizado não interessa, pois tais informações não aparecem na função de verossimilhança.

4.3 Teorema de Bayes

A inferência bayesiana estima a densidade de probabilidade a posteriori, a partir do teorema de Bayes para distribuição de probabilidades, com o uso do conhecimento a priori sobre os parâmetros. Ou seja, a distribuição de probabilidade a posteriori de um evento aleatório é definida como a probabilidade condicional que é atribuída ao evento após ter sido considerada uma evidência relevante. Se há uma evidência experimental de um determinado fenômeno probabilístico, a distribuição de probabilidade a posteriori associa essa evidência com alguma variável aleatória. Assim, caso uma variável aleatória possua uma distribuição normal $N \sim (\mu, \sigma)$, a distribuição de probabilidade a posteriori será indicada por $p \sim (\mu, \sigma|x)$. Tal distribuição viabiliza calcular a probabilidade do par (μ, σ) , dado um certo valor de x .

Segundo Gill (2009), uma ferramenta que atualiza o conhecimento prévio sobre um parâmetro, utilizando os dados observados, é o teorema de Bayes. Dessa forma, considera-se o interesse nos valores de k quantidades desconhecidas, onde $k = 1, 2, \dots$, e também o fato de que a informação prévia a respeito desses valores seja expressa através de uma função distribuição de probabilidade $p(\theta)$, sendo θ o parâmetro de importância. Considera-se ainda que $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ seja o resultado de n observações relevantes sobre a variável aleatória de interesse, que tem uma distribuição de probabilidade que depende do vetor θ de parâmetros desconhecidos. As componentes de y são variáveis aleatórias e a dependência de y em θ pode ser expressa por meio da função de verossimilhança, $p(y|\theta)$. Logo, tem-se que

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{p(\theta)p(y|\theta)}{p(y)}, \quad (4.4)$$

onde $p(y) = \sum_{\theta} p(\theta)p(y|\theta)$ é a soma sobre todos os possíveis valores de θ , para o caso discreto, e $p(y) = \int p(\theta)p(y|\theta)d\theta$, se θ for contínuo.

Na inferência bayesiana, o teorema de Bayes é geralmente apresentado por (Gill, 2009; Migon et al., 2015)

$$p(\theta|y) \propto p(\theta)p(y|\theta), \quad (4.5)$$

onde $p(y)$ é omitido, uma vez que não depende do parâmetro θ e é considerado como uma constante normalizadora que não altera as probabilidades relativas de θ . Ainda, $p(\theta)$ é chamado de distribuição a priori do parâmetro de interesse, $p(y|\theta)$ é a função de verossimilhança e $p(\theta|y)$ é chamada de função distribuição a posteriori. Portanto, a inferência bayesiana, por meio da distribuição a posteriori, reflete o conhecimento sobre o parâmetro de interesse.

Em alguns casos, a estrutura da distribuição a posteriori pode ser altamente complexa, e portanto, as operações de integração requeridas podem se tornar complexas também. Desta forma, técnicas de aproximações de integrais são utilizadas para a implementação do método bayesiano. As mais comuns são as técnicas de simulação estocástica, conhecidas como métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov, que serão discutidos a seguir.

4.4 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov

Argumenta-se que foi a partir da introdução dos métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov, comumente conhecidos como métodos MCMC (do inglês *Markov Chain Monte Carlo*), que a utilização do método bayesiano se difundiu. Antes disso, a abordagem bayesiana se limitava a distribuições a priori e funções de verossimilhança que obtinham uma distribuição a posteriori possível de ser estabelecida analiticamente. Por essa limitação, o cálculo de integrais complexas através de métodos numéricos não se fazia presente. Métodos baseados em aproximações assintóticas foram propostos (Geman e Lopes, 2006; Tanner, 2006), mais especificamente as aproximações de Laplace, as aproximações via quadratura Gaussiana e os métodos baseados em simulação estocástica.

Um processo estocástico é um conjunto consecutivo de variáveis aleatórias definido em um espaço conhecido, tal como Θ , conjunto de ordem conhecida e denotado por $\{\theta^{[t]} : t \in T\}$. Esse espaço de estado ou espaço paramétrico está relacionado ao intervalo de valores permitido para o vetor aleatório de parâmetros de interesse. Geralmente T é o conjunto de inteiros positivos espaçado pelo intervalo de tempo, de forma que o processo pode ser mostrado por $\theta^{[t=0]}, \theta^{[t=1]}, \theta^{[t=2]}, \dots$

Assim, uma cadeia de Markov consiste de uma metodologia estocástica na qual a probabilidade de fazer uma transição de um estado atual $\theta^{[t]}$ para um novo estado depende somente do estado atual, sendo independente dos valores anteriores, o que é expresso formalmente por $p(\theta^{[t]} \in A | \theta^{[0]}, \theta^{[1]}, \dots, \theta^{[t-2]}, \theta^{[t-1]})$, onde A é o conjunto de eventos ou intervalo de eventos no espaço de estado completo. Independente do estado inicial, pode-se gerar uma trajetória e alcançar uma distribuição de equilíbrio $p(y)$.

Portanto, se a distribuição a posteriori tem uma forma muito complexa, um método MCMC é utilizado a fim de simular amostras desta distribuição. Ou seja, o intuito é

empregar um método MCMC para gerar amostras de distribuição a posteriori $f(\theta|y)$, tal que esta seja a distribuição estacionária da cadeia.

A seguir, são apresentados os métodos de MCMC mais aplicados em inferência bayesiana. Para uma descrição detalhada, indica-se Gamerman e Lopes (2006).

4.4.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings

O método de Metropolis-Hastings teve origem no algoritmo de Metropolis (Metropolis et al., 1953), posteriormente generalizado por Hastings (Hastings, 1970). Consiste em um método que gera amostras aleatórias de uma distribuição sem que se saiba sua densidade. O algoritmo de Metropolis-Hastings amostra valores da distribuição alvo, que são gerados por meio de um passeio aleatório no espaço paramétrico, começado em um ponto arbitrário escolhido pelo usuário. Esse passeio aleatório progride a cada intervalo de tempo, sugerindo um movimento para uma nova posição no espaço paramétrico, onde tal movimento é avaliado por uma metodologia de aceitação-rejeição.

O algoritmo gera uma cadeia de Markov, onde a realização da variável aleatória do estado atual depende apenas do estado anterior. A fim de um melhor entendimento, supõe-se $p(\theta)$, a distribuição de interesse, $\theta^{(j)}$, o valor atual e $q(\theta, \theta^{(j)})$, a distribuição proposta, ou distribuição geradora de valores candidatos. Logo, o modo de amostragem é:

- 1 - Amostrar um valor candidato da distribuição proposta, $\theta^* \sim q(\theta, \theta^{(j)})$;
- 2 - Calcular a probabilidade de aceitar o valor candidato amostrado,
$$\alpha(\theta^{(j)}, \theta^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(\theta^*)q(\theta^{(j)}, \theta^*)}{p(\theta^{(j)})q(\theta^*, \theta^{(j)})} \right\};$$
- 3 - Definir $\theta^{(j+1)} = \theta^*$ com probabilidade $\alpha(\theta^{(j)}, \theta^*)$; caso contrário definir $\theta^{(j+1)} = \theta^{(j)}$;
- 4 - Repetir o processo até alcançar convergência.

Segundo Chib e Greenberg (1995), a convergência da cadeia é atingida de acordo com duas condições de regularidade: irreducibilidade e aperiodicidade. Para maiores informações sobre a estrutura do algoritmo Metropolis-Hastings, recomenda-se consultar Chib e Greenberg (1995) e Brooks et al. (2011).

4.4.2 Amostrador de Gibbs

O amostrador de Gibbs foi proposto por Geman e Geman (1984) e popularizado no início dos anos 90 por Gelfand e Smith (1990). Surgiu como uma opção mais eficiente que o algoritmo de Metropolis-Hastings, que funciona satisfatoriamente quando a distribuição proposta está devidamente adequada com a distribuição a posteriori. Isto é, se a distribuição proposta for muito estreita ou muito larga, é provável que uma ampla

proporção de movimentos propostos seja rejeitada e a trajetória ficará estancada em uma região localizada do espaço paramétrico.

Assim como o algoritmo de Metropolis-Hastings, o amostrador de Gibbs também é uma forma de passeio aleatório por meio do espaço amostral. Ele é iniciado em um ponto arbitrário indicado pelo usuário e, em cada ponto do passeio aleatório, o próximo passo depende somente da posição atual.

Nesta abordagem, as probabilidades de transição dos estados são realizadas a partir das distribuições condicionais completas. Assim, considera-se o teorema de Bayes para escrever a densidade de probabilidade a posteriori da seguinte forma:

$$p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n | y) = p(\theta_1 | \theta_2, \dots, \theta_n, y) p(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n | y). \quad (4.6)$$

Ou seja, amostrando cada condicional completa em turno, resultam valores proporcionais à distribuição a posteriori. O amostrador utiliza tal relação para amostrar de forma iterativa cada variável, deixando a outra variável no seu estado anterior no tempo. Os parâmetros componentes são escolhidos ordenadamente, uma vez que, para modelos com um grande número de parâmetros, seriam necessários muitos passos para se visitar todos os parâmetros de maneira semelhante, a longo prazo.

O amostrador de Gibbs, portanto, é um caso particular do algoritmo de Metropolis-Hastings, onde a distribuição estabelecida depende da localização no espaço paramétrico e do parâmetro componente selecionado. Depois da seleção de um parâmetro componente em um ponto, admite-se então que a distribuição proposta para o próximo valor correspondente a esse parâmetro será a probabilidade condicional a posteriori do mesmo. Sendo a distribuição proposta um espelho da probabilidade a posteriori desse parâmetro, o movimento proposto será sempre aceito.

Este amostrador é verdadeiramente útil quando a posteriori conjunta completa não pode ser determinada de forma analítica, e portanto, não pode ser amostrada diretamente. No entanto, todas as distribuições condicionais podem ser determinadas e amostradas diretamente.

O funcionamento do amostrador de Gibbs é dividido em dois estágios. No primeiro momento, pretende-se obter formas analíticas para cada condicional completa, enquanto que no segundo passo pretende-se gerar amostras para as densidades a posteriori. Isto é, seja $p_1(\theta_i | \theta_{-1})$ uma função densidade condicional de θ_i e dados os valores de todos os outros θ_j s com $j \neq i$, admite-se que é possível amostrar valores destas distribuições para cada $i = 1, \dots, n$. Assim, o método de amostragem é:

- 1 - Selecionar um vetor de valores iniciais para as variáveis aleatórias, a partir das

distribuições a priori das variáveis $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0)$, para todos os parâmetros desconhecidos do modelo;

2 - Gerar θ_1^{j+1} de $p_1(\theta_1|\theta_2^{(j)}, \dots, \theta_n^{(j)})$;

3 - Gerar θ_2^{j+1} de $p_2(\theta_2|\theta_1^{(j+1)}, \theta_3^{(j)}, \dots, \theta_n^{(j)})$;

4 - Refazer consecutivamente os passos 2 e 3 para $i = 3, \dots, n$, sendo que no último passo, gera-se $\theta_p^{(j+1)}$ de $p_n(\theta_n|\theta_1^{(j+1)}, \theta_2^{(j+1)}, \dots, \theta_{n-1}^{(j+1)})$, obtendo-se o vetor $\theta^{(j+1)} = (\theta_1^{(j+1)}, \dots, \theta_p^{(j+1)})$.

De acordo com o aumento no número de iterações, a cadeia se aproxima de sua distribuição de equilíbrio, independente do seu valor original. Entende-se que a convergência é atingida na iteração em que a distribuição se aproxima da distribuição de equilíbrio $p(\theta|y)$.

Segundo Kruschke (2015), não é necessário, no amostrador de Gibbs, ajustar uma distribuição proposta e não existe ineficácia de movimentos propostos. Essas seriam as vantagens em relação ao algoritmo de Metropolis-Hastings. Entretanto, há a restrição da necessidade de obter probabilidades condicionais para cada parâmetro em relação aos demais parâmetros e gerar amostras aleatórias dessas distribuições de probabilidades condicionais. Em outras palavras, ao alterar apenas um valor do parâmetro por vez, a sua evolução pode ser estacionada por parâmetros altamente correlacionados.

A metodologia do algoritmo de Gibbs pode ser mais explorada em Casella e George (1992) e Gamerman e Lopes (2006).

4.4.3 Objetivos do MCMC

Conforme Kruschke (2015), há três principais objetivos a serem atingidos quando gera-se uma amostra MCMC de uma distribuição a posteriori. São eles:

- Os valores de cada cadeia têm que ser representativos da distribuição a posteriori. Eles não podem ser influenciados pelo valor arbitrário inicial configurado para começar a cadeia e devem explorar todo o espaço paramétrico da distribuição a posteriori, sem ficar preso em alguma região localizada.
- A cadeia deve ter um tamanho suficiente para realizar a estimativa com precisão e estabilidade. As estimativas, principalmente de tendência central e limites de intervalo de confiabilidade, não devem divergir muito, caso as simulações sejam geradas novamente.
- A cadeia deve ser gerada de forma eficiente, ou seja, com o menor número possível de passos, para não exigir muito esforço computacional.

Para maiores informações e detalhes acerca dos métodos de alcance dos objetivos acima citados, sugere-se Kruschke (2015).

4.5 Verificação Preditiva da Posteriori

Conforme visto no início deste capítulo, Kruschle (2015) sugere que, após realizados todos os passos da simulação MCMC, o quinto e último passo da abordagem bayesiana consiste em verificar se o modelo, com seus valores de parâmetros mais confiáveis, realmente imitam os dados razoavelmente bem, o que é chamado de *Posterior Predictive Check*, ou Verificação Preditiva da Posteriori.

Segundo Giere (1988), a tese que associa um modelo matemático a dados empíricos não é a de que o processo de geração de dados é exatamente correspondente ao modelo, e sim a de que a fonte dos dados imita o modelo de forma semelhante o suficiente, pelo menos nos aspectos relevantes ao pesquisador, de forma que o raciocínio baseado no modelo seja confiável. Tal confiabilidade não necessita de total fidelidade ao modelo. Dessa forma, conforme Gelman et al. (2004), a verificação do modelo tem como objetivo identificar onde podem estar ocorrendo falhas e o que pode ser aperfeiçoado.

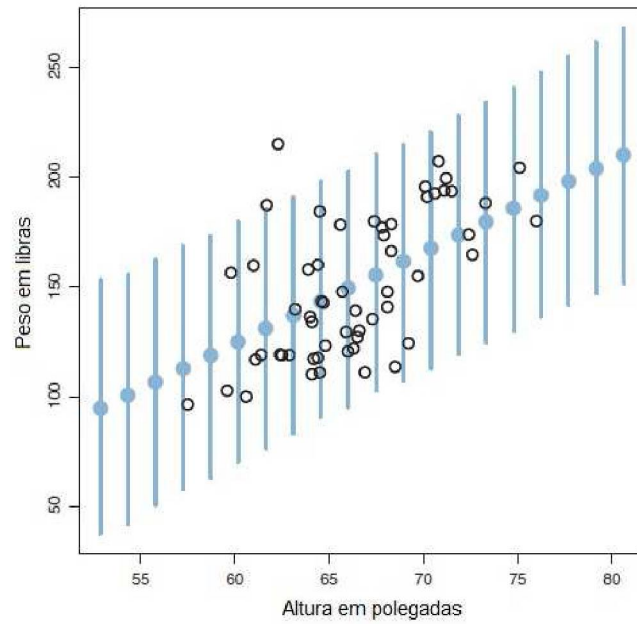
Não há apenas uma maneira de verificar se as previsões do modelo desviam-se sistemática e significativamente dos dados, pois existem inúmeras formas de definir o desvio sistemático. Uma abordagem é plotar um resumo dos dados previstos do modelo em relação aos dados reais. A partir de uma inspeção visual de um gráfico, pode-se analisar se os dados reais parecem ou não estar bem descritos pelos dados previstos. Os dados reais não podem, por exemplo, se desviarem das tendências centrais ou de uma banda predita pelo modelo.

Uma forma de resumir uma distribuição é utilizando o HDI (*Highest Density Interval*, ou Intervalo de Alta Densidade). O HDI indica quais pontos de uma distribuição são mais confiáveis e quais cobrem a maior parte da distribuição. Logo, o HDI resume a distribuição especificando um intervalo que abrange a maior parte da distribuição, por exemplo, 95% dela, de modo que cada ponto dentro do intervalo tenha maior credibilidade do que qualquer ponto fora do intervalo.

A Figura 12 é um exemplo encontrado em Kruschle (2015) que ilustra de forma breve o citado acima. É possível observar que os valores de peso preditos são resumidos por barras verticais que mostram o intervalo dos valores de ponderação preditos mais confiáveis, no caso, 95%. Já o ponto no meio de cada barra mostra a média dos valores de peso preditos. Por uma análise visual do gráfico, pode-se ver que os dados reais parecem estar bem descritos pelos dados preditos. Portanto, os dados reais não parecem desviar-se sistematicamente da tendência ou banda predita deste modelo específico.

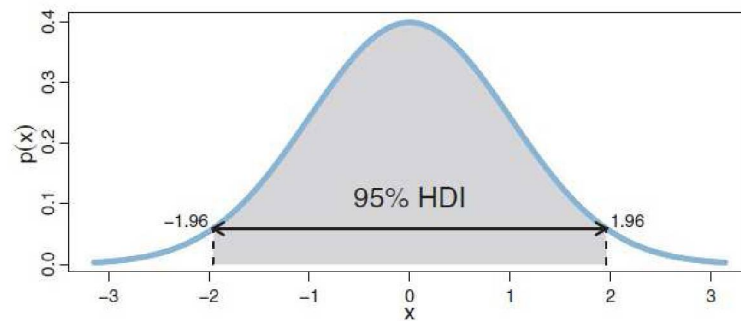
Alguns autores usam, ainda, o ETI (*Equal-Tailed Interval*, ou Intervalo de Cauda Igual). Um ETI de 95% tem 2,5% da distribuição em ambos os lados dos seus limites inferior e superior, indicando o percentil de 2,5% e o percentil de 97,5%. Em distribuições simétricas, como uma distribuição normal (Figura 13), o ETI e o HDI são os mesmos.

Figura 12: Dados com HDI de 95% e média das previsões posteriores.



FONTE: Kruschle (2015).

Figura 13: Exemplo com HDI de 95%.



FONTE: Kruschle (2015).

A razão de usar o HDI é que o seu raciocínio é intuitivo, ou seja, todos os valores dentro do HDI têm maior densidade de probabilidade (isto é, credibilidade) do que qualquer valor fora do HDI. Portanto, esse intervalo contém os valores mais confiáveis.

4.6 Inferência Bayesiana em Fenômenos Vibratórios

A inferência bayesiana pode ser aplicada em várias áreas (Gelman et al., 2004). Para concluir o presente capítulo, são apresentados, nesta seção, alguns trabalhos conhecidos na literatura que envolvem fenômenos vibratórios e inferência bayesiana.

Segundo Lopez e Sarigul-Klijn (2010), o mundo em que vivemos não é determinístico. A abordagem por modelos estatísticos, em substituição aos modelos determinísticos,

vem sendo cada vez mais explorada e adotada em várias situações reais. No trabalho de Gogu et al. (2010), os autores compararam a formulação básica de mínimos quadrados, que fornece um valor específico para cada parâmetro, com uma abordagem estatística, o método bayesiano, que fornece, como resposta, uma distribuição de probabilidade para cada parâmetro, pois considera cada um deles como uma variável aleatória. A comparação foi observada nos resultados da identificação de constantes elásticas de um material compósito, tendo sido concluído que a inferência bayesiana chega a resultados mais valiosos que a abordagem por mínimos quadrados.

Segundo Ortiz et al. (2015), as técnicas bayesianas fornecem informações probabilísticas das estimativas, que podem ser úteis no momento de tomar decisões com respeito à seleção de parâmetros e/ou modelos matemáticos que simulam o comportamento de um sistema. Zhou et al. (2016) empregaram a inferência bayesiana no desenvolvimento de um modelo probabilístico eficiente e preciso na análise de vibração de estruturas com incertezas, as quais o custo computacional é elevado, devido à alta dimensionalidade que envolve os modelos de elementos finitos. Essas incertezas foram encontradas nas variações dos parâmetros dinâmicos da estrutura e foram analisadas com o uso da abordagem MCMC. A incerteza, em palavras simples, é a falta de certeza. Em detalhes, é um estado de conhecimento limitado onde é impossível descrever exatamente o estado existente ou o(s) resultado(s) futuro(s) (Doebeling e Hemez, 2001).

A consideração sistemática de incertezas é tão importante quanto possuir o modelo apropriado do sistema estrutural, especialmente durante a validação do modelo onde o erro total entre a observação física e a predição do modelo deve ser caracterizado (Lopez e Sarigul-Klijn, 2010). No trabalho recém-citado, os respectivos autores forneceram uma análise das fontes de incertezas na avaliação de danos estruturais e controle de um veículo de voo, a partir da abordagem bayesiana, que produz uma estimativa de probabilidade por meio de uma função distribuição de probabilidade bem caracterizada.

A abordagem bayesiana é também utilizada como um método de atualização de modelos. De acordo com Ortiz et al. (2015), as técnicas bayesianas de atualização de modelos estão se tornando a ferramenta padrão para a identificação de sistemas dinâmicos. Em Cheung e Beck (2009), a inferência bayesiana foi utilizada na atualização de modelos dinâmicos estruturais via simulações híbridas de Monte Carlo e na caracterização das incertezas associadas ao modelo.

An et al. (2015) mostraram uma revisão de métodos que, através da inferência bayesiana, estimaram e atualizaram parâmetros desconhecidos de um modelo, na forma de uma função densidade de probabilidade, visando o prognóstico de falhas, danos e desgastes de estruturas. Neste contexto, Jiang et al. (2012) apresentaram um esquema para a previsão precoce de falhas do eixo de engrenagens, utilizando metodologias bayesianas de estimativa e controle, posto que essas falhas aparecem especialmente como rachaduras por fadiga devido ao carregamento cíclico. Já em Jaramillo et al. (2017), a abordagem

da inferência bayesiana foi proposta para avaliar a saúde de uma máquina rotativa em operação e de cada elemento individual desta máquina, uma vez que uma falha em um componente pode levar a um aumento do nível de vibração na máquina como um todo.

A inferência bayesiana aparece também em análises de vulnerabilidade de estruturas, embora se possa dizer que ainda há poucas pesquisas sobre a medida probabilística da vulnerabilidade de estruturas controladas sob várias excitações dinâmicas (Kim e Bai 2010; Sharifi et al., 2009; Kim et al., 2012). Em um trabalho antecedente, Casciati et al. (2008) propuseram a avaliação do risco sísmico de uma estrutura de ponte estaiada controlada passivamente, usando a apresentação de informações de vulnerabilidade sob a forma de curvas de fragilidade analítica desenvolvidas através de simulações de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC).

Kim et al. (2013) apresentaram um modelo para desenvolver avaliações do risco sísmico através de curvas de fragilidade dos sensores defeituosos encontrados no sistema de controle estrutural semi-ativo de um prédio de três andares, que emprega um amortecedor histerético magneto-reológico. Essas curvas foram obtidas utilizando o método de simulação MCMC. Também em controle semi-ativo, cita-se o trabalho de Chen e Ni (2011), que identificaram a dinâmica de um amortecedor magneto-reológico incorporado a uma estrutura de viga de aço, aplicando a metodologia de inferência bayesiana, e analisaram a eficiência do modelo dinâmico formulado em uma aplicação de controle de vibração semi-ativo.

No quadro de modelos histeréticos, Worden e Hensman (2012) utilizaram técnicas MCMC e o método de Metropolis-Hastings (MH) para estimar os parâmetros de um modelo Bouc-Wen de histerese. Já Ortiz et al. (2015), a partir de uma técnica bayesiana com a aplicação de um método MCMC, identificaram um conjunto de parâmetros de um modelo histerético do tipo Bouc-Wen. Os parâmetros foram ajustados de forma que a saída do modelo correspondesse o melhor possível aos dados experimentais. Os autores empregaram o modelo ajustado para prever o comportamento do sistema físico sob diferentes excitações e fins de controle de vibrações.

Considerando o controle de vibrações, Kerschen et al. (2003) desenvolveram um modelo baseado em inferência bayesiana, para identificação de uma estrutura mecânica não linear, em uma base de isolador mecânico. O modelo proposto forneceu o conhecimento das não linearidades através de um algoritmo bayesiano. Segundo os autores, o método se mostrou uma ferramenta importante para a dinâmica estrutural.

Na identificação de parâmetros modais de um modelo estrutural, Katafygiotis e Yuen (2001) utilizaram dados ambientais de resposta no domínio do tempo e uma abordagem bayesiana de densidade espectral para a atualização modal, a fim de determinar os valores ótimos dos parâmetros modais. Por seu lado, Au e Ni (2014) desenvolveram uma abordagem bayesiana no domínio da frequência, que produz uma distribuição de probabilidade a posteriori dos parâmetros modais, em um teste de vibração forçada de

uma estrutura que simula uma ponte de pedestres.

Segundo Hernandez et al. (2015b), modelos constitutivos, tais como modelos baseados em derivadas fracionárias (Pritz, 2003) ou baseados no conceito de variável interna (Castello et al., 2008), que caracterizam as propriedades dinâmicas de um material viscoelástico, podem assumir simplificações ou aproximações que não permitem uma representação completa do comportamento do material. Assim, a dinâmica não modelada pode gerar incertezas na caracterização do modelo constitutivo e consequentemente, no modelo estrutural.

A caracterização das propriedades dinâmicas é geralmente realizada por um problema de otimização que encontra os parâmetros que melhor se ajustam entre a previsão do modelo e os dados medidos. Assim, o processo de identificação dos parâmetros requer o uso de dados experimentais, e a qualidade da medição pode ser afetada por ruído ou problemas na aquisição do sinal. Esses fatores raramente são levados em conta e representam uma origem de incertezas. Outra fonte de incertezas na caracterização do modelo viscoelástico aparece no processo de identificação dos parâmetros do modelo constitutivo, quando analisa-se a influências dessas incertezas na resposta dinâmica da estrutura.

Oates et al. (2013), por meio da validação da taxa de deformação de um elastômero dielétrico em deformação finita, quantificaram a incerteza de um modelo viscoelástico. As funções densidade de probabilidade foram obtidas através do método bayesiano e, a partir das incertezas do aspecto viscoelástico, foram observadas melhorias na previsão do comportamento constitutivo viscoelástico.

Hernandez et al. (2015b) analisaram a incerteza associada ao módulo de cisalhamento de um núcleo viscoelástico de uma viga sanduíche, com base em um modelo de derivada fracionária com cinco parâmetros. A propagação da incerteza no modelo constitutivo do núcleo viscoelástico foi realizada com base nas funções densidade de probabilidade para os cinco parâmetros, utilizando a simulação MCMC. Similarmente, a partir dos dados da função resposta em frequência de uma viga sanduíche, Zhang et al. (2013) apresentaram a caracterização das propriedades dinâmicas do material viscoelástico utilizando a abordagem bayesiana, com um modelo de derivada fracionária de cinco parâmetros.

Em um trabalho anterior, Hernandez et al. (2015a) obtiveram o módulo de cisalhamento como uma variável aleatória e uma função distribuição de probabilidade para os cinco parâmetros do modelo constitutivo de derivada fracionária de um material viscoelástico, utilizando a abordagem bayesiana. Na identificação dos parâmetros bayesianos, os autores utilizaram um método de Monte Carlo via cadeias de Markov.

Em Balbino (2016), foi proposta uma abordagem bayesiana para a caracterização das propriedades dinâmicas de um material viscoelástico modelado no domínio da frequência, por um modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros. Essas propriedades dinâmicas foram representadas pelo módulo real de elasticidade e seu fator de

perda. A distribuição a posteriori foi simulada por um método MCMC. A abordagem proposta forneceu uma distribuição de probabilidade para cada parâmetro considerado, levando em consideração ainda a dependência da temperatura, através das equações WLF e de Arrhenius.

Um grande trunfo do paradigma bayesiano é o seu tratamento único e consistente de modelos complexos (Nagel e Sudret, 2013). Dessa forma, a abordagem bayesiana associa dados de diferentes origens, bem como incertezas, e aparece como uma importante ferramenta probabilística na previsão e tomada de decisão diante de uma situação real.

5 METODOLOGIA E MATERIAIS

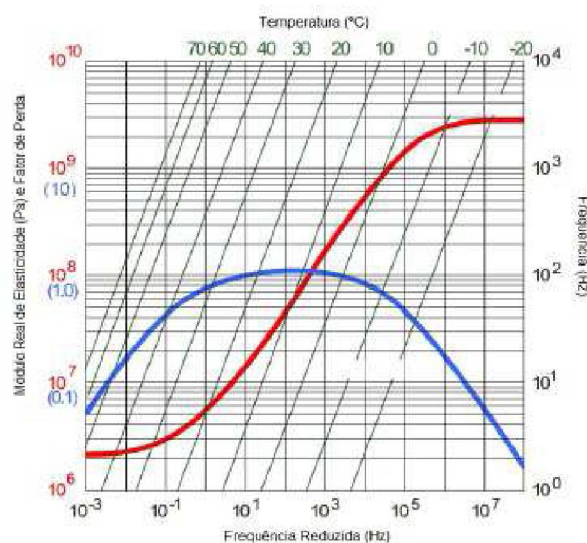
Com base no exposto nos capítulos anteriores, descreve-se aqui o material utilizado no controle de vibrações, bem como os programas computacionais correspondentes. Apresentam-se também a verificação do modelo preditivo da amostra extraída da distribuição a posteriori obtida via inferência bayesiana e, em seguida, a seleção dos parâmetros no ambiente MatLab, com o fornecimento de valores com maior credibilidade para um projeto de controle. Por fim, mostram-se as metodologias adotadas para os projetos de controle de vibrações, quais sejam, o sistema de isolamento e o sistema de neutralização.

5.1 Material Viscoelástico

O material viscoelástico utilizado no presente estudo foi investigado por Jones (1992) e Lopes (1998) e é um material conhecido e peculiar. Esse material é fabricado e vendido pela *E-A-R Aeero Technologies LLC* (uma empresa do grupo 3M), sendo comercialmente nomeado por ISODAMP C-1002. Trata-se de um elastômero a base de cloreto de polivinila (Dandekar et al, 1991; Szabo e Keough, 2002).

Na Figura 14, apresenta-se o nomograma de frequência reduzida do material. Este nomograma é disponibilizado pelo fabricante nas informações de apresentação e divulgação do produto. O material em questão é comumente empregado no controle de vibrações, em aplicações que vão desde equipamentos de laboratórios e escritórios até equipamentos industriais e automotivos.

Figura 14: Nomograma do material EAR ISODAMP C-1002.

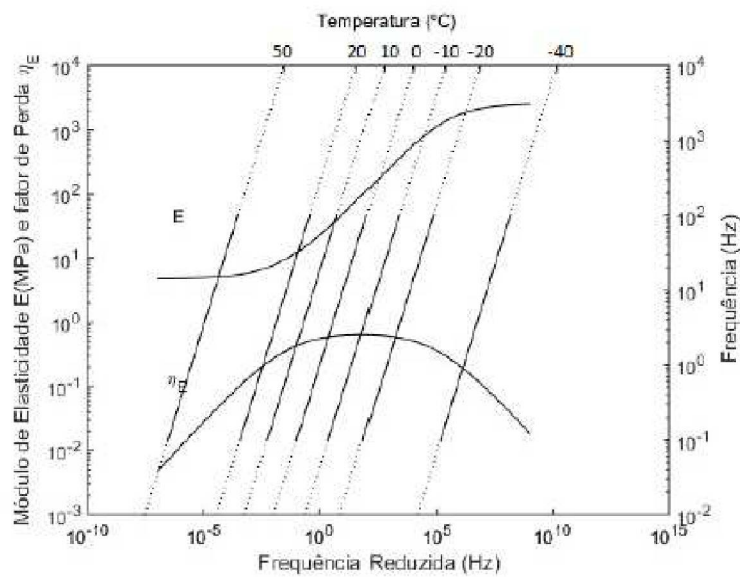


FONTE: EAR (1996).

Nos projetos de controle de vibrações apresentados neste trabalho, foram utilizados

os resultados da caracterização dinâmica do material realizada em Balbino (2016). No estudo citado, os parâmetros foram estimados via inferência bayesiana. Ou seja, para cada parâmetro do modelo de derivada fracionária, foi estimada uma distribuição de probabilidade, tornando possível calcular as estimativas que forem de interesse em um projeto de controle de vibrações (Balbino, 2016). A Figura 15 apresenta o nomograma de frequência reduzida para os dados referentes à média dos valores estimados naquele trabalho, para o modelo de derivada fracionária de 4 parâmetros combinado com a equação de Arrhenius.

Figura 15: Nomograma de frequência reduzida das médias previstas.



FONTE: Balbino (2016).

5.2 Caracterização Probabilística do Material

A análise estatística e a implementação da inferência bayesiana desenvolvidas em Balbino (2016) foram novamente realizadas neste trabalho. A primeira foi feita através do *software* R, programa livre de manipulação de dados, execução de cálculos e gráficos estatísticos, que pode ser obtido através do endereço eletrônico <http://www.r-project.org/>. Já a segunda foi executada através do programa JAGS (*Just Another Gibbs Sampler*). O JAGS é uma plataforma de livre acesso que utiliza simulações de Monte Carlo via Cadeias de Markov para análise de modelos bayesianos e pode ser obtido acessando o endereço eletrônico <http://sourceforge.net/projects/mcmc-jags>. Ambos os programas, R e JAGS, são conectados por uma interface implementada utilizando os pacotes Rjags (Plummer, 2014) e R2jags (Su e Yajima, 2015).

O programa computacional para análise do modelo bayesiano desenvolvido em Balbino (2016), e utilizado novamente neste trabalho, encontra-se no Anexo A.

5.2.1 Parâmetros do Material via Inferência Bayesiana

Os resultados obtidos em Balbino (2012) e Balbino (2016) para o material viscoelástico foram novamente abordados neste trabalho. O experimento realizado em Balbino (2012) com o material EAR ISODAMP C-1002 contemplou 25 amostras, em 7 temperaturas e 10 frequências. Esse estudo analisou o comportamento dinâmico de um material viscoelástico considerado como típico, determinando suas propriedades dinâmicas, quais sejam, os módulos real e imaginário de elasticidade e o correspondente fator de perda, através da análise em temperaturas e frequências pré-determinadas. O experimento associado foi conduzido como um experimento fatorial, em que os fatores de variação estudados foram temperatura e frequência (Balbino, 2012). Foi observado, então, que a dispersão das propriedades dinâmicas, embora não seja, de modo geral, elevada, também não poderia ser considerada insignificante, visto que se encontra bem acima do valor considerado em materiais metálicos de uso comum em engenharia, que é da ordem de 3%.

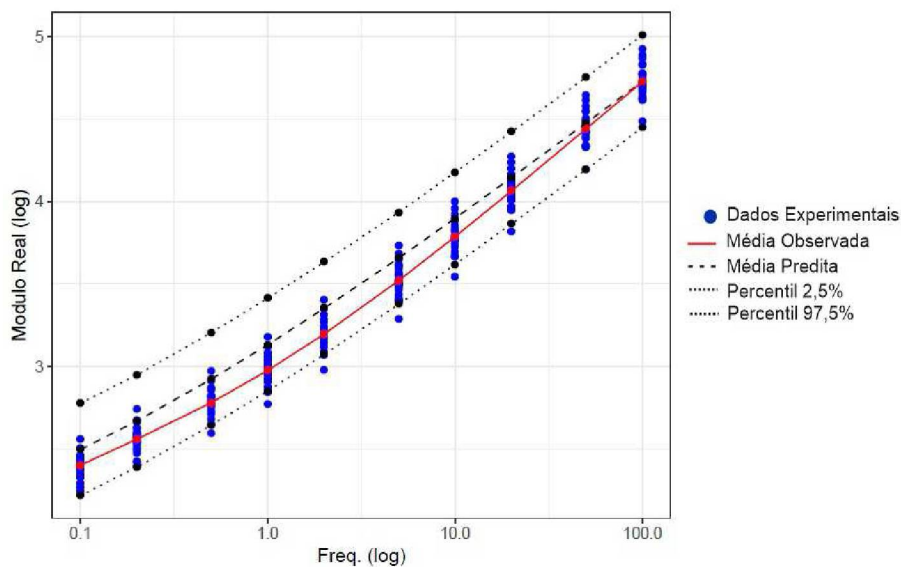
No estudo de Balbino (2016), o modelo bayesiano implementado contemplou as partes real e imaginária do módulo complexo de elasticidade do mesmo material, utilizando as equações de Arrhenius e WLF no cálculo do fator de deslocamento. No presente trabalho, optou-se pela equação de Arrhenius (equação 2.27), face à sua melhor resposta computacional. A priori considerada foi o ensaio das 25 amostras de Balbino (2012). A partir dos resultados das 25 amostras experimentais do material EAR ISODAMP C-1002, foi realizada a simulação MCMC para cinco parâmetros do modelo do material, quatro parâmetros do modelo de derivada fracionária (equação 2.29) e mais um advindo da equação de Arrhenius. Nessa implementação, foram estimadas as distribuições de probabilidade a posteriori dos parâmetros de interesse através de 100.002 iterações MCMC, com a geração de três cadeias.

Na verificação da predição a posteriori do modelo (seção 4.5), os 100.002 conjuntos de valores dos parâmetros foram considerados reais e inseridos novamente no modelo bayesiano, para checar se os resultados dos valores das distribuições a posteriori estavam descrevendo realmente os resultados alcançados no experimento. Esse método de verificação da predição a posteriori, denominado *Posterior Predictive Check*, é amplamente utilizado e consiste em levar os valores simulados para o modelo e fazer a conferência (Kruschke, 2015).

Os conjuntos de valores resultantes deste procedimento conhecido como ressimulação foram chamados conjuntos de valores ressimulados. A partir desses conjuntos de valores ressimulados, foi então selecionada uma amostra aleatória de 2.000 conjuntos, que foram utilizados para o cálculo do módulo real de elasticidade e do módulo imaginário de elasticidade.

Recorda-se do estudo de Balbino (2012) que as 25 amostras experimentais do material foram ensaiadas para 7 temperaturas (-40°C , -20°C , -10°C , 0°C , 10°C , 20°C e 50°C) e 10 frequências (0,1 Hz; 0,2 Hz; 0,5 Hz; 1 Hz; 2 Hz; 5 Hz; 10 Hz; 20 Hz; 50 Hz e 100 Hz). Com isso, e com base na abordagem de Kruschke (2015), para cada um dos 2.000 conjuntos de valores dos parâmetros, são gerados 1750 dados de módulos real e imaginário de elasticidade, correspondentes a 25 amostras em 10 frequências e 7 temperaturas. Nessa mesma abordagem, foram definidas, para cada par frequência e temperatura, as estatísticas descritivas da distribuição preditiva, que são a média, o percentil de 2,5% e o percentil de 97,5%. A Figura 16 mostra um diagrama de dispersão para a verificação da predição a posteriori do módulo real, enquanto a Figura 17 contempla o módulo imaginário. A Figura 16 e a Figura 17 mostram apenas os resultados obtidos na temperatura de 0°C ; para mais detalhes e resultados completos, vide Balbino (2016).

Figura 16: Verificação preditiva - Módulo real de elasticidade.



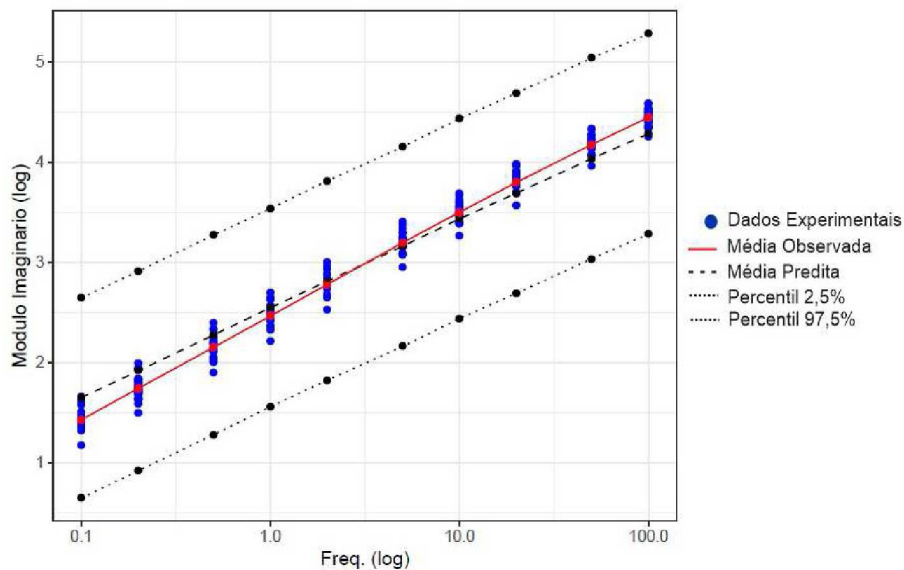
FONTE: O Autor.

Os gráficos foram confeccionados em escala logarítmica para a melhor visualização dos dados. A unidade dos módulos é Pa (Pascal) e da frequências Hz (Hertz). Observa-se, nos gráficos de dispersão, um pequeno desvio entre a média observada e a média predita. Contudo, verifica-se que o modelo se ajusta aos dados que foram observados experimentalmente.

O procedimento brevemente descrito acima forneceu 2.000 conjuntos de valores de parâmetros para o material, bem como a média e os percentis dos módulos real e imaginário. Entretanto, em um primeiro momento, quando esses valores foram diretamente incorporados em um projeto de controle, e não usados preliminarmente para gerar dados

por amostragem, como descrito anteriormente, os resultados não foram satisfatórios. Notou-se que a significativa dispersão nas propriedades dinâmicas que esse material apresenta não se refletia nas dimensões dos dispositivos projetados com o material viscoelástico em questão, caracterizado que fora via inferência bayesiana. Assim, uma análise mais apurada desse conjunto de dados foi realizada, como exposto mais detalhadamente na próxima subseção.

Figura 17: Verificação preditiva - Módulo imaginário de elasticidade.



FONTE: O Autor.

5.2.2 Seleção dos Parâmetros do Material

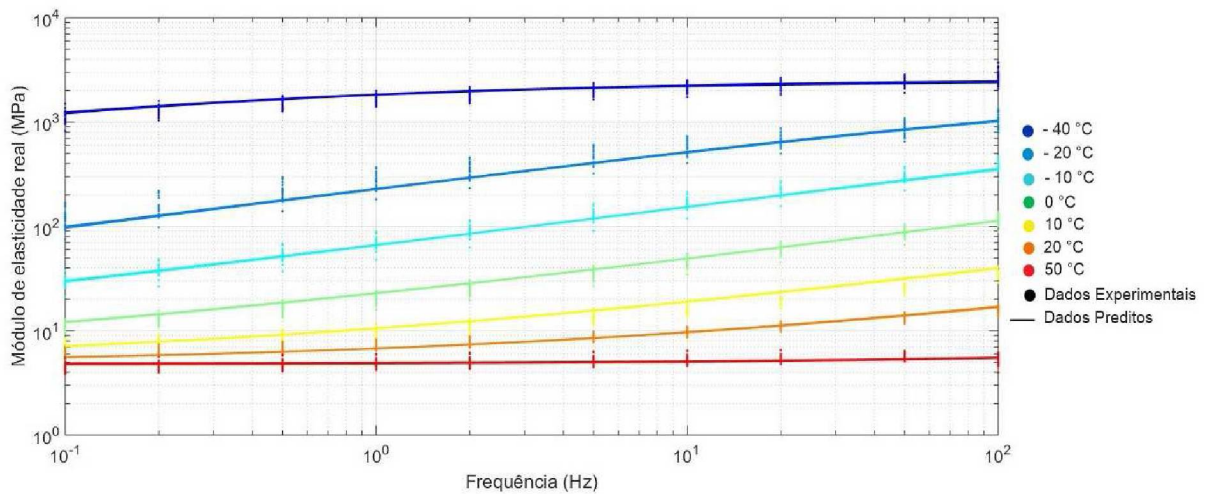
A partir da amostra de 2.000 conjuntos de valores de parâmetros e das estatísticas descritivas obtidas pela inferência bayesiana, foram realizadas três etapas de assimilação do comportamento dos dados no ambiente MatLab. Visou-se determinar o conjunto de parâmetros que pudesse refletir adequadamente a variabilidade encontrada nas propriedades dinâmicas nas dimensões dos dispositivos de controle, escopo deste trabalho.

Todas as etapas de assimilação foram realizadas inicialmente tanto para o módulo real quanto para o imaginário. Entretanto, após alguma reflexão decidiu-se trabalhar apenas com o módulo real de elasticidade, uma vez que ele está diretamente ligado ao fator de projeto, dado tanto pela equação 3.33, quanto pela 3.55. Portanto, o módulo real foi priorizado devido à sua participação ser mais importante do que a do módulo imaginário para os fins desse trabalho.

A primeira etapa de assimilação utilizou diretamente os valores dos 2.000 conjuntos de parâmetros para a geração dos respectivos módulos reais, comparando-os com os

dados das 25 amostras experimentais, como pode ser visualizado na Figura 18. A cada par frequência-temperatura, foram representados os dados experimentais e as curvas correspondentes aos respectivos módulos reais obtidos dos 2.000 conjuntos de parâmetros. Foi possível verificar que as curvas não delimitavam os dados amostrais, havendo mais uma sobreposição das 2.000 curvas, que aparentemente se consolidaram junto aos valores médios desses dados.

Figura 18: Módulo real para os 2.000 conjuntos de parâmetros e as 25 amostras experimentais.



FONTE: O Autor.

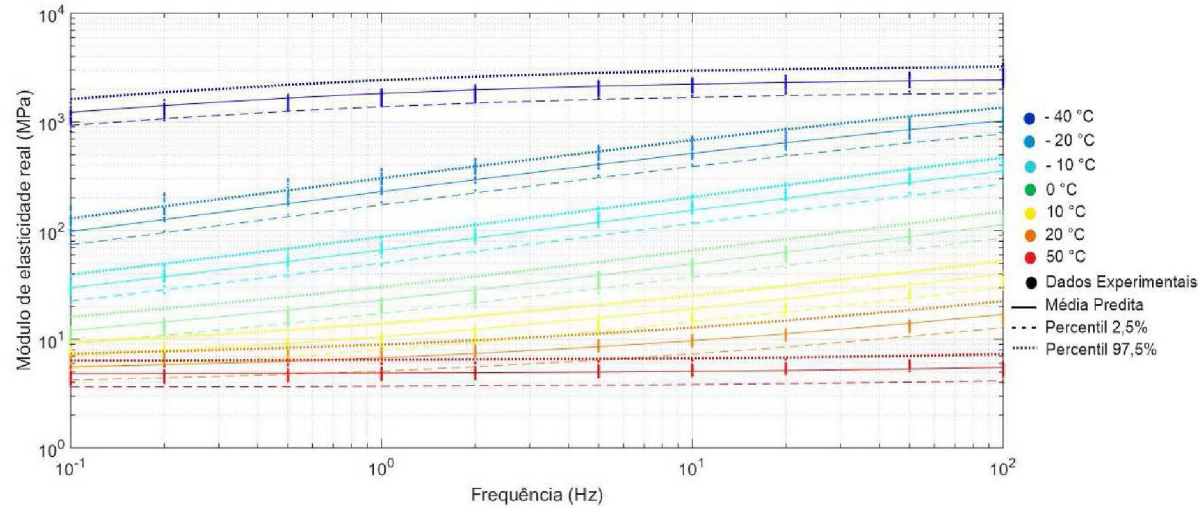
Assim, decidiu-se, numa segunda etapa, gerar as estatísticas descritivas do módulo real para os 2.000 conjuntos de parâmetros. Ou seja, fixou-se uma faixa que concentra, em probabilidade, 95% dos dados. Logo, a construção da faixa de referência consistiu em determinar o percentil de 2,5% e o percentil de 97,5% e ainda a determinação da média dos valores computados. O resultado é ilustrado na Figura 19.

Observou-se, nessa etapa, que a maioria dos dados experimentais encontrava-se entre o limite inferior (percentil de 2,5%) e o limite superior (percentil de 97,5%). Entretanto, a média e os percentis dos respectivos módulos eram pontos discretos, a cada par frequência e temperatura, dos 2.000 conjuntos de parâmetros. Dessa forma, verificou-se a necessidade de uma equação que representasse parametricamente esses pontos. Ou seja, buscou-se ajustar modelos que descrevessem cada conjunto de pontos para a média, para o percentil de 2,5% e para o percentil de 97,5%.

Para isso, foi realizado numa terceira etapa, um ajuste de curvas no MatLab para cada conjunto de pontos (média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%), empregando o modelo de derivada fracionária de 4 parâmetros e a equação de Arrhenius, que forneceram uma única curva para cada uma das estatísticas descritivas em questão. No Apêndice A, são apresentados, nas sete temperaturas, os valores de módulo real obtidos pelos ajustes,

bem como os valores de módulo real para média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%, respectivamente.

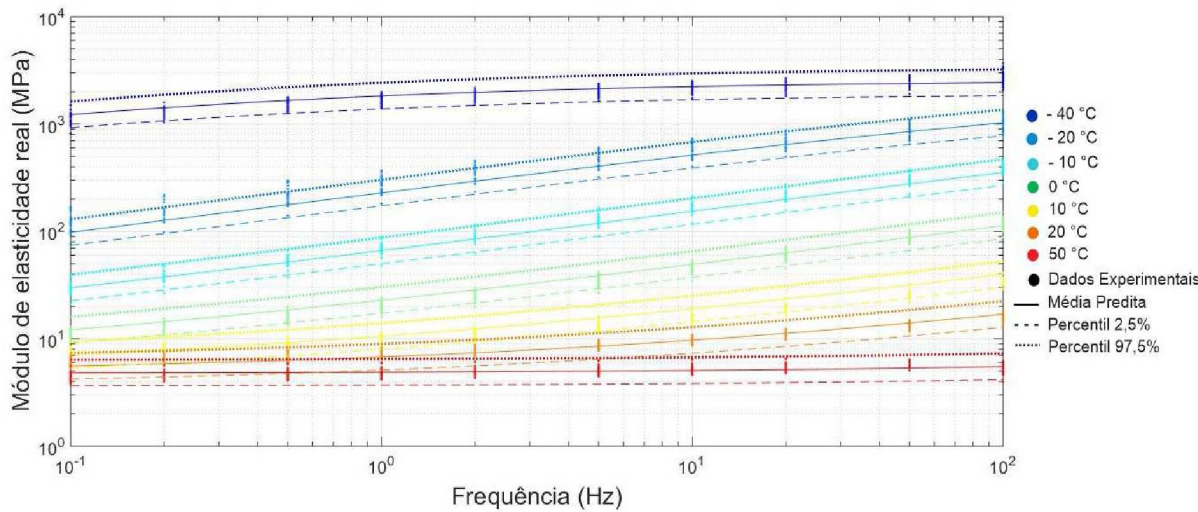
Figura 19: Módulo real para as estatísticas descritivas dos 2.000 conjuntos de parâmetros.



FONTE: O Autor.

Verificou-se, ao final dessa etapa, a credibilidade dos valores ajustados. Notou-se que os dados experimentais não desviaram-se sistematicamente dos valores preditos associados aos módulos ajustados para as estatísticas descritivas, como mostrado na vide Figura 20.

Figura 20: Módulo real ajustado para as estatísticas descritivas dos 2.000 conjuntos de parâmetros.



FONTE: O Autor.

Dessa forma, os conjuntos de valores de parâmetros requeridos para as simulações de controle puderam ser reduzidos a três, conforme mostra a Tabela 1. Para cada uma das estatísticas descritivas, média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%, foi obtido um conjunto ajustado com os quatro parâmetros da derivada fracionária mais um parâmetro da equação de Arrhenius, que foram os utilizados no projeto dos dispositivos de controle.

Tabela 1: Parâmetros do material viscoelástico caracterizado via Inferência Bayesiana.

Parâmetros	E_0 [Pa]	E_∞ [Pa]	b	β	T_A [K]
Média	$4,77 \cdot 10^6$	$2,58 \cdot 10^9$	0,0042	0,39	9495,77
Percentil 2,5%	$3,68 \cdot 10^6$	$1,99 \cdot 10^9$	0,0043	0,33	10986,08
Percentil 97,5%	$6,06 \cdot 10^6$	$3,54 \cdot 10^9$	0,0040	0,48	7458,06

FONTE: O Autor.

Exposta a definição dos parâmetros para o material viscoelástico, apresenta-se, na próxima seção, os projetos de controle realizados com tal material.

5.3 Projetos de Controle de Vibrações

Os programas computacionais para os projetos de controle de vibrações foram implementados no *software* MatLab (*MATrix LABoratory*), que é um ambiente computacional proprietário e possui uma versão para avaliação gratuita de 30 dias. Essa versão pode ser encontrada no endereço eletrônico <https://www.mathworks.com/campaigns/products/trials.html?ref=ggl>.

O MatLab é um poderoso pacote computacional e seu processamento dos dados de interesse ocorre essencialmente por procedimentos matriciais. Sua aplicação se dá em várias áreas do conhecimento, dentre elas, análise de elementos finitos, análise de sinais e inteligência artificial, além de outras em que os problemas numéricos se fazem presentes.

A seguir, descreve-se a metodologia realizada para o projeto de isolamento, bem como para o projeto de neutralização. Na sequência, aborda-se a formulação adotada para a obtenção das dimensões do elemento resiliente utilizado nos controles de vibração subjacentes.

5.3.1 Projeto de Isolamento

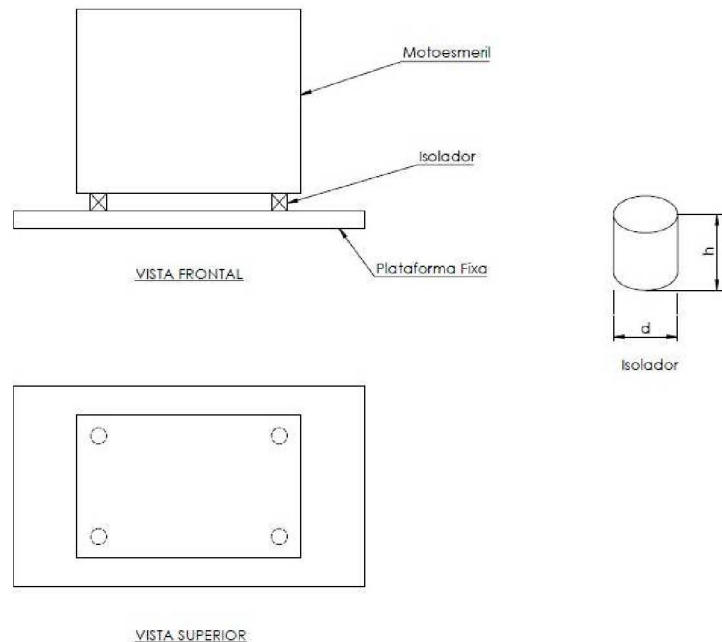
A partir das considerações conceituais e metodológicas já apresentadas, exemplifica-se aqui a metodologia do projeto de isolamento passivo de força, conforme mostrado na Figura 6 (seção 3.1.1), com a utilização de um material viscoelástico caracterizado por inferência bayesiana. No projeto, empregou-se o material viscoelástico EAR ISODAMP C-1002, face à sua eficácia e uso corrente em isolamento de vibrações, sendo tal material

modelado com os parâmetros da Tabela 1. Foram assumidos quatro isoladores, trabalhando em paralelo e à compressão. A Figura 21 apresenta, de maneira esquemática, a montagem do sistema de interesse com os respectivos isoladores cilíndricos.

O sistema de interesse, modelado com um grau de liberdade, foi um matoesmeril de 4,9 kg, fabricado pela Schulz Ferramentas e retratado na Figura 22. Considerou-se esse equipamento montado numa plataforma fixa, de impedância infinita. A rotação de operação do equipamento é igual a 3500 rpm (o que está associado a uma frequência de aproximadamente 58,3 Hz) e o objetivo foi projetar um sistema de isolamento que fornecesse 80% de redução.

Tem-se, então, que, para uma redução de 80%, o módulo da transmissibilidade desejada correspondente é igual a 0,2. Ou seja, a amplitude da força transmitida será igual a 20% da amplitude da força gerada pelo equipamento, na frequência de interesse, frequência essa associada à rotação de operação do esmeril. Em dB, esse módulo seria aproximadamente igual a -14 dB (ref. 1m/N). As temperaturas de trabalho consideradas foram de $-2,1^{\circ}\text{C}$, $17,4^{\circ}\text{C}$ e $33,5^{\circ}\text{C}$, que foram, respectivamente, as temperaturas mínima, média e máxima de Curitiba, registradas em 2013 pelo Instituto Nacional de Meteorologia.

Figura 21: Esquema de montagem do matoesmeril.



FONTE: O Autor.

Com o valor da transmissibilidade desejada e com a expressão do módulo da transmissibilidade, dada pela equação 3.18, determinou-se a frequência característica (ou natural) do sistema isolado. Para isso, foi implementado no *software* MatLab com o auxílio

Figura 22: Motoesmeril plus Schulz 5" 180W.



FONTE: Schulz Ferramentas.

da função f_{zero} , uma equação não linear, que possibilitou a obtenção da frequência característica do sistema para cada temperatura de trabalho e para cada um dos conjuntos de parâmetros, a saber, média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%, conforme Tabela 1.

Então, a partir das frequências características determinadas, foram obtidos os valores dos fatores de projeto, dados pela equação 3.32. Como o fator de projeto está diretamente ligado às dimensões do elemento resiliente, no projeto proposto, os isoladores tiveram forma cilíndrica. No tocante à determinação das dimensões, duas alternativas de obtenção podem ser empregadas, como apresentado na seção 3.1.3, o que foi explorado no presente trabalho.

5.3.2 Projeto de Neutralização

No projeto de neutralização, realizado de forma independente do anterior, o objetivo foi determinar a frequência natural, ou característica, do neutralizador, considerado como um sistema em si, com um grau de liberdade. Para tanto, algumas características distintas devem ser contempladas, quando se compara esse projeto ao projeto de isolamento. Nessa abordagem, a preocupação não residiu na frequência de rotação do esmeril, e sim na frequência de ressonância do sistema primário.

Determinou-se inicialmente uma faixa de frequência na qual o neutralizador agiria. Essa faixa envolveu a frequência de ressonância do sistema primário modelado com um grau de liberdade. Para um sistema pouco amortecido, a frequência de ressonância é aproximadamente igual à frequência natural. Assumindo a frequência de ressonância do esmeril montado sobre uma bancada flexível (sistema primário) em 45 Hz, face a investigações experimentais, então a faixa de frequência de controle foi estabelecida no intervalo de 30 Hz até 60 Hz.

As temperaturas de trabalho foram, como antes, de $-2,1^{\circ}\text{C}$, $17,4^{\circ}\text{C}$ e $33,5^{\circ}\text{C}$. A massa do sistema primário era 4,9 kg e os parâmetros do material viscoelástico foram os apresentados na Tabela 1, dados esses também já utilizados no projeto de isolamento. Estabeleceu-se a massa do neutralizador, arbitrariamente, como 5% da massa do sistema primário, utilizando-se apenas um neutralizador no projeto de neutralização.

Determinou-se a receptância do sistema neutralizado, pela equação 3.53, sendo as frequências características, ou ótimas, do neutralizador aquelas que forneceram ao sistema vibrante as maiores reduções possíveis na receptância, dentro das condições especificadas. A partir de uma estimativa inicial para cada frequência característica do neutralizador, correspondente a cada conjunto de parâmetros realizou-se o processo de otimização não linear, descrito na subseção 2.2.2, que conduziu à respectiva frequência ótima. Com a frequência ótima determinada para cada conjunto de parâmetros e a massa do neutralizador também predeterminada, obteve-se o fator de projeto associado para cada temperatura de trabalho, pela equação 3.55. A receptância predita para o sistema neutralizado pode ser calculada pela mesma equação 3.53 já citada.

Analogamente ao caso do projeto de isolamento, foi possível a partir dos fatores de projeto, determinar, em cada caso, as dimensões do neutralizador. Foram seguidas as mesmas alternativas apresentadas na seção 3.1.3, a partir da equação 3.34. Essas alternativas são especificadas na próxima subseção.

5.3.3 Cálculo das Dimensões do Elemento Cilíndrico

Em concordância com os procedimentos propostos para os dois projetos de controle apresentados anteriormente, expôs-se na subseção 3.1.3, que há, na literatura, duas alternativas de se determinar as dimensões de um elemento resiliente viscoelástico cilíndrico. Essas alternativas são especificadas abaixo.

Pela primeira alternativa, doravante denominada de "Dimensões 1", calculou-se a altura do elemento cilíndrico, conforme a equação 3.40. Obtida essa altura, determinou-se o diâmetro pela resolução da equação 3.38. Nesta alternativa, o diâmetro é resultado de um polinômio de grau 4 e considera-se apenas a raiz real e positiva.

Já pela segunda alternativa, "Dimensões 2", utilizada quando há restrições de espaço, foi estabelecida uma razão entre a altura e o diâmetro menor que 10, com o auxílio da equação 3.41. Então, calculou-se o diâmetro pela equação 3.42 e, conseqüentemente, obteve-se a altura.

Ambas as alternativas podem ser utilizadas pelo projetista. Basta que ele estabeleça as limitações do seu projeto para o cálculo das mesmas, sejam elas limitações algébricas ou limitações de espaço.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados e analisados os resultados obtidos com a utilização de um material viscoelástico caracterizado via inferência bayesiana, no projeto de dispositivos de controle de vibrações. A primeira seção apresenta os resultados das simulações para o projeto de isolamento. Já a segunda seção expõe os resultados da simulação para o projeto de neutralização. Recorda-se que ambos os projetos abordaram um sistema modelado com um grau de liberdade. Por fim, na terceira seção, faz-se uma análise final relativa aos resultados obtidos com o uso de um material caracterizado probabilisticamente em projetos de controle.

6.1 Resultados para o Projeto de Isolamento

Nesta seção, são apresentados os resultados para o projeto de isolamento com um sistema de um grau com liberdade, sendo o programa computacional desenvolvido para tal exposto no Apêndice B. O material viscoelástico EAR ISODAMP C-1002, caracterizado via inferência bayesiana, apresenta os cinco parâmetros em seu modelo, quatro parâmetros oriundos da abordagem por derivada fracionária e um parâmetro da equação de Arrhenius, conforme exposto no capítulo anterior e apresentado na Tabela 1. Esta tabela é repetida abaixo por conveniência.

Parâmetros do material viscoelástico caracterizado via Inferência Bayesiana.

Parâmetros	E_0 [Pa]	E_∞ [Pa]	b	β	T_A [K]
Média	$4,77 \cdot 10^6$	$2,58 \cdot 10^9$	0,0042	0,39	9495,77
Percentil 2,5%	$3,68 \cdot 10^6$	$1,99 \cdot 10^9$	0,0043	0,33	10986,08
Percentil 97,5%	$6,06 \cdot 10^6$	$3,54 \cdot 10^9$	0,0040	0,48	7458,06

6.1.1 Frequências Características e Fatores de Projeto

A partir de cada um dos conjuntos de parâmetros, quais sejam, o conjunto de parâmetros referentes à média, ao percentil de 2,5% e ao percentil de 97,5%, calculou-se a frequência característica e o fator de projeto correspondentes, nas três temperaturas de trabalho, a saber, $-2,1^\circ\text{C}$, $17,4^\circ\text{C}$ e $33,5^\circ\text{C}$. Os resultados podem ser visualizados na Tabela 2, na Tabela 3 e na Tabela 4, respectivamente.

Tabela 2: Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $-2,1^\circ\text{C}$.

T = $-2,1^\circ\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
frequência característica [Hz]	17,91	19,19	16,03
fator de projeto [cm]	0,08	0,14	0,04

Tabela 3: Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: 17,4°C.

T = 17,4°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
frequência característica [Hz]	19,62	20,81	17,53
fator de projeto [cm]	0,56	0,92	0,29

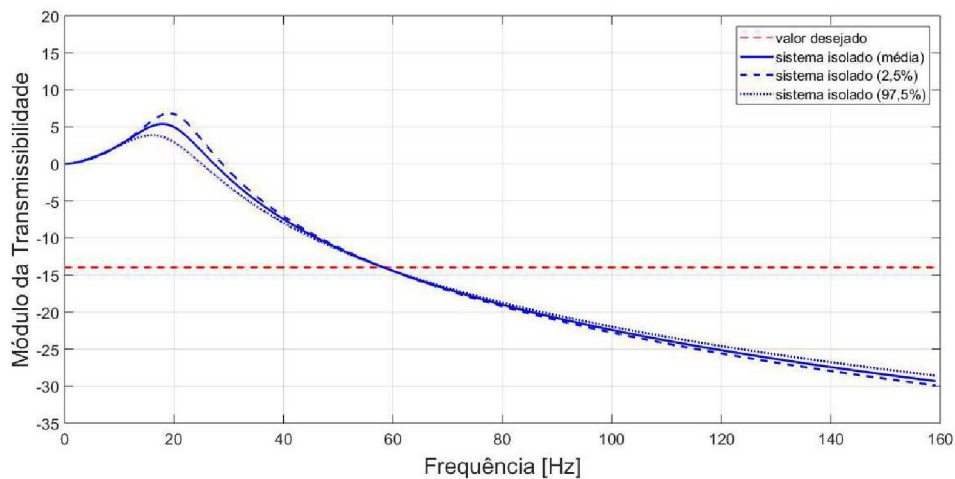
Tabela 4: Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: 33,5°C.

T = 33,5°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
frequência característica [Hz]	22,17	22,72	20,87
fator de projeto [cm]	1,45	2,07	0,91

Pode-se observar que, para cada conjunto de parâmetros, a frequência característica e o fator de projeto mostraram valores significativamente distintos. Essa variação pode ser vista também para as três temperaturas de trabalho adotadas. Se, por um lado, essa constatação era conhecida e esperada, a anterior ainda não era conhecida da literatura.

Sendo assim, o módulo complexo da transmissibilidade complexa para cada conjunto de parâmetros foi verificado. A Figura 23, a Figura 24 e a Figura 25 mostram as curvas de transmissibilidade dos três conjuntos de parâmetros, para cada temperatura de trabalho. Pode-se observar que as curvas de transmissibilidade interceptam a reta correspondente a transmissibilidade desejada de -14 dB na frequência de aproximadamente 58 Hz, ou seja, exatamente na frequência de interesse do projeto de isolamento.

Figura 23: Módulo da transmissibilidade na temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$.



Observa-se ainda que, para cada temperatura, o módulo da transmissibilidade complexa comportou-se de maneira diferente para o conjunto de parâmetros da média, do percentil de 2,5% e do percentil de 97,5%. À medida que a temperatura de trabalho aumentou, a curva de transmissibilidade, na frequência característica, apresentou um pico mais acentuado. Isso se explica pelo fato de que, face ao uso do material viscoelástico

utilizado (vide Figura 14) com o progressivo aumento da temperatura, o sistema torna-se menos amortecido. Com as variações expostas acima, antecipa-se que as dimensões dos isoladores também devem variar.

Figura 24: Módulo da transmissibilidade na temperatura de $17,4^{\circ}\text{C}$.

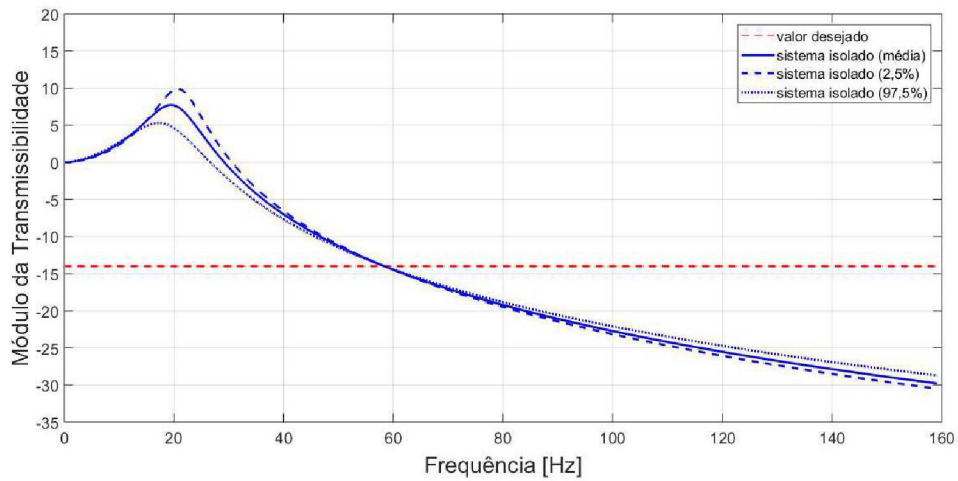
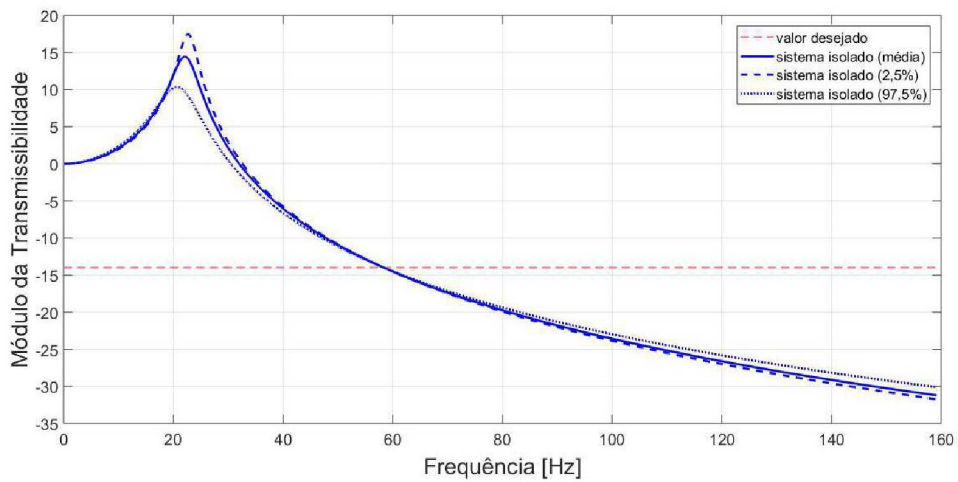


Figura 25: Módulo da transmissibilidade na temperatura de $33,5^{\circ}\text{C}$.



A seguir, são apresentados os resultados para as dimensões dos isoladores viscoelásticos cilíndricos.

6.1.2 Dimensões dos Isoladores

A obtenção das dimensões dos isoladores seguiu os passos das duas abordagens vistas na subseção 2.1.3, quais sejam, "Dimensões 1" e "Dimensões 2". No Apêndice C, são apresentadas as implementações computacionais de ambas as abordagens.

Os resultados para a primeira abordagem, denominada "Dimensões 1", podem ser vistos na Tabela 5, na Tabela 6 e na Tabela 7, para cada uma das três temperaturas de trabalho.

Tabela 5: Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$.

T = $-2,1^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	12,47	6,97	25,70
diâmetro [cm]	1,13	1,13	1,13

Tabela 6: Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$.

T = $17,4^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	1,79	1,10	3,46
diâmetro [cm]	1,11	1,09	1,13

Tabela 7: Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$.

T = $33,5^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	0,70	0,49	1,11
diâmetro [cm]	1,03	0,97	1,09

Já para a segunda abordagem, dita "Dimensões 2", a Tabela 8, Tabela 9 e Tabela 10 contêm os resultados.

Tabela 8: Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$.

T = $-2,1^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	12,75	22,79	6,18
diâmetro [cm]	1,15	2,05	0,56

Tabela 9: Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$.

T = $17,4^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	1,81	2,95	0,93
diâmetro [cm]	1,12	1,83	0,58

Tabela 10: Dimensões dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: 33,5°C.

T = 33,5°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	0,70	1,00	0,44
diâmetro [cm]	1,03	1,48	0,65

A fim de fornecer uma melhor visualização das variações nas dimensões dos dispositivos, foram elaborados esboços dos isoladores cilíndricos para cada temperatura e cada conjunto de parâmetros, nas duas abordagens empregadas. Isso pode ser observado na Figura 26, na Figura 27 e na Figura 28 para a abordagem "Dimensões 1", e na Figura 29, na Figura 30 e na Figura 31, para a abordagem "Dimensões 2".

Figura 26: Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: -2,1°C.

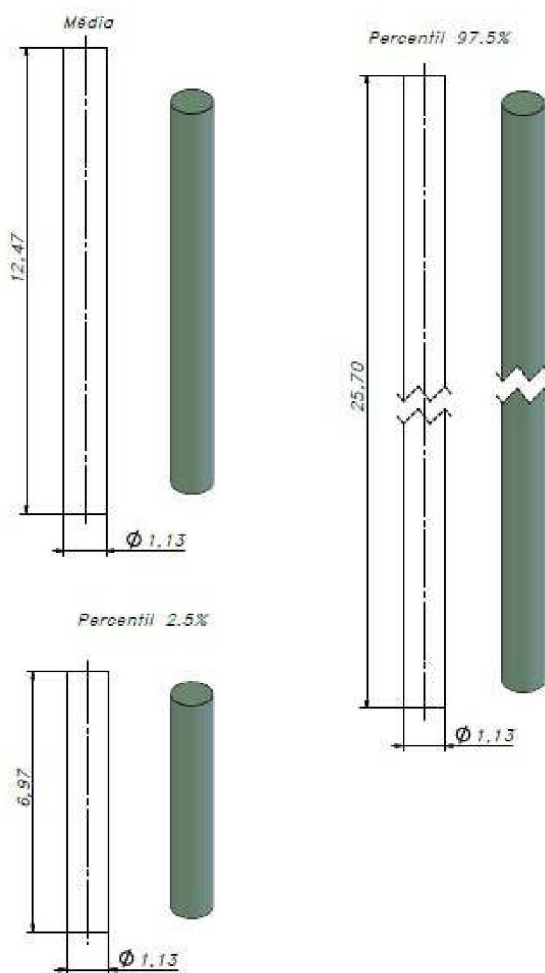


Figura 27: Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: 17,4°C.

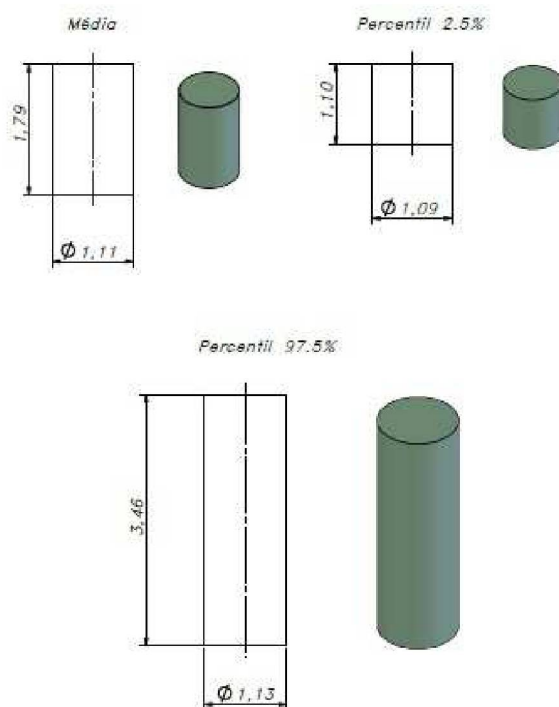


Figura 28: Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: 33,5°C.

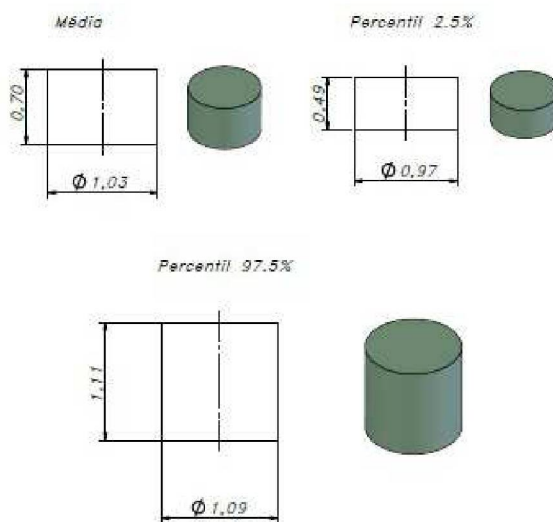


Figura 29: Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$.

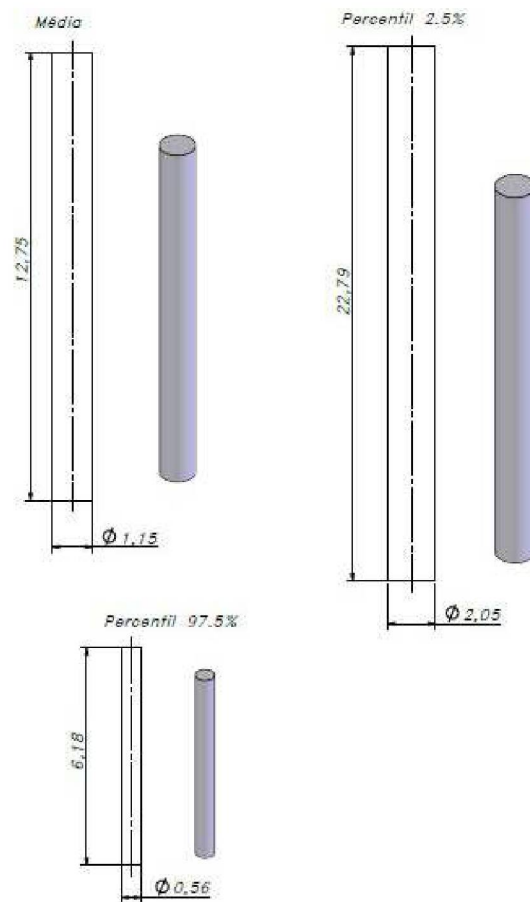


Figura 30: Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$.

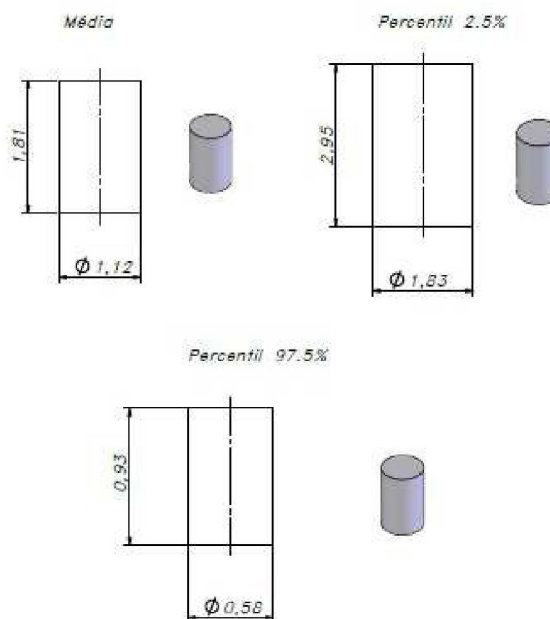
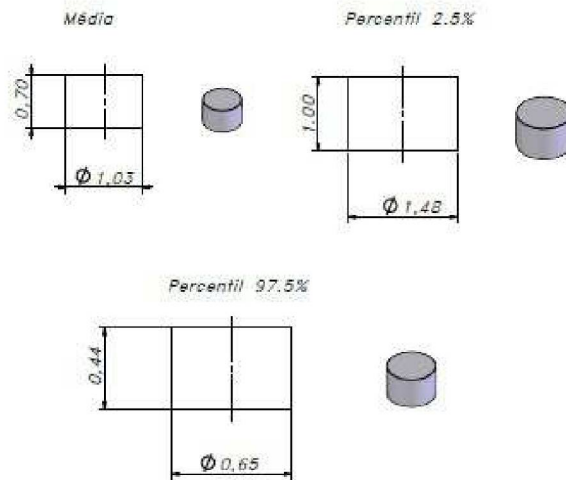


Figura 31: Esboço dos isoladores - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: 33,5°C.



Quando observa-se, por exemplo, o isolador com as dimensões de $h = 12,47$ cm e $d = 1,13$ cm, obtido pela abordagem "Dimensões 1", com o conjunto de parâmetros da média, na temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$, chega-se à constatação de que este isolador, face às suas características geométricas, não seria factível para o projeto de isolamento do esmeril. Ou seja, um dispositivo como esse, nessa temperatura, não seria de fato utilizado.

Já a utilização do isolador com as dimensões de $h = 1,00$ cm e $d = 1,48$ cm, obtido pela abordagem "Dimensões 2", com o conjunto de parâmetros do percentil de 2,5%, na temperatura de $33,5^{\circ}\text{C}$, seria factível. Percebe-se que estas dimensões são compatíveis com o sistema em questão e, portanto, essa poderia ser uma opção de dispositivo para uma eventual fabricação.

Entretanto, sabe-se que a temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$ pode acontecer em Curitiba, conforme o próprio registro do Instituto Nacional de Meteorologia constatou em 2013. Nessas condições, poder-se-ia questionar o que ocorreria com o esmeril na temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$, apoiado sobre isoladores projetados para uma temperatura de $33,5^{\circ}\text{C}$. O que se iria verificar nesse cenário seria uma elevação de transmissão de vibração do esmeril para a base, pois o isolador estaria muito rígido para a temperatura de trabalho de $-2,1^{\circ}\text{C}$. Nesse caso, a troca de material, deveria ser considerada, pois o material aqui investigado não seria adequado para uso em ampla faixa de temperatura.

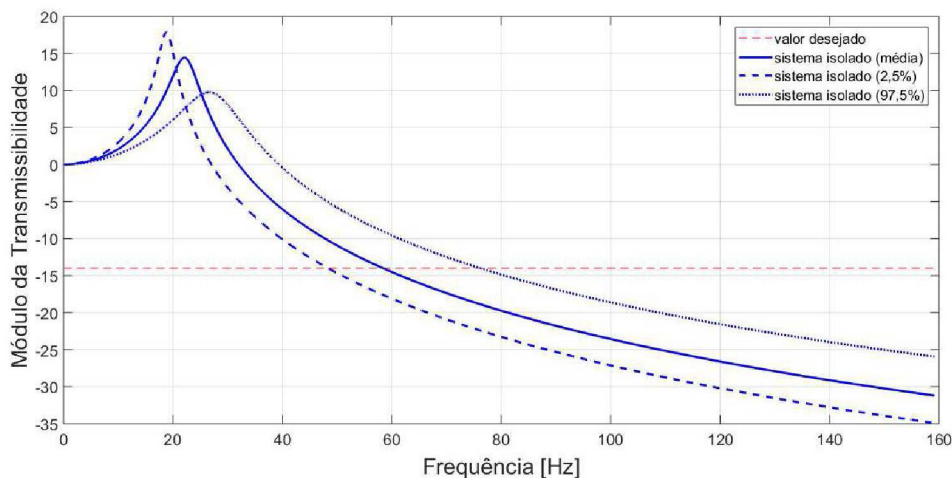
6.1.3 Aferição do Desempenho - Projeto de Isolamento

Conforme observado nos resultados obtidos para o projeto de isolamento, a variação da temperatura já é algo conhecido da literatura. Verificando as curvas de transmissibilidade, percebe-se que em todas as temperaturas e para todos os conjuntos de parâmetros, a transmissibilidade desejada é alcançada. Entretanto, qual é a variação de desempenho entre os isoladores projetados?

Suponha-se que se deseje construir os isoladores para uma aplicação efetiva e para isso, escolhe-se o conjunto de parâmetros da média na temperatura de $33,5^{\circ}\text{C}$ (Tabela 10). O que acontece com a transmissibilidade se por ventura, face ao processo de fabricação, o isolador resultante apresente os parâmetros do conjunto do percentil de 2,5% ou de 97,5%?

A partir desse contexto foi realizada a aferição de desempenho do isolador construído com as características mencionadas acima. O resultado pode ser visualizado na Figura 32.

Figura 32: Aferição do desempenho - Isolamento - Parâmetros da média ($33,5^{\circ}\text{C}$).



Observa-se que a transmissibilidade para o conjunto de parâmetros da média, apresenta o mesmo desempenho já verificado no seu projeto. Entretanto para os conjuntos de parâmetros de 2,5% e 97,5% os resultados não atendem ao especificado na fase do projeto. Quando os parâmetros são do percentil de 2,5%, a transmissibilidade mostra-se até melhor, uma vez que o isolador fica mais flexível. Contudo, para o conjunto do percentil de 97,5%, o alcance da transmissibilidade desejada acontece em uma frequência mais alta do que a frequência de interesse, ou seja, o isolador fica mais rígido e a transmissibilidade desejada não é alcançada.

A aferição para as temperaturas de $-2,1^{\circ}\text{C}$ e $17,4^{\circ}\text{C}$ para os três conjuntos de parâmetros do material, é apresentada na Figura 33 e na Figura 34. Considerações análogas

às expostas acima podem ser feitas para tais figuras.

Figura 33: Aferição do desempenho - Isolamento - Parâmetros da média ($-2, 1^{\circ}\text{C}$).

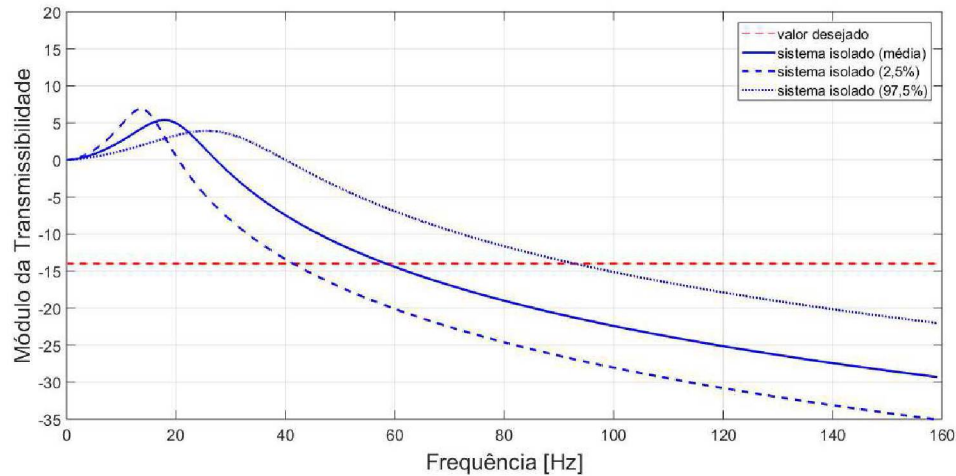
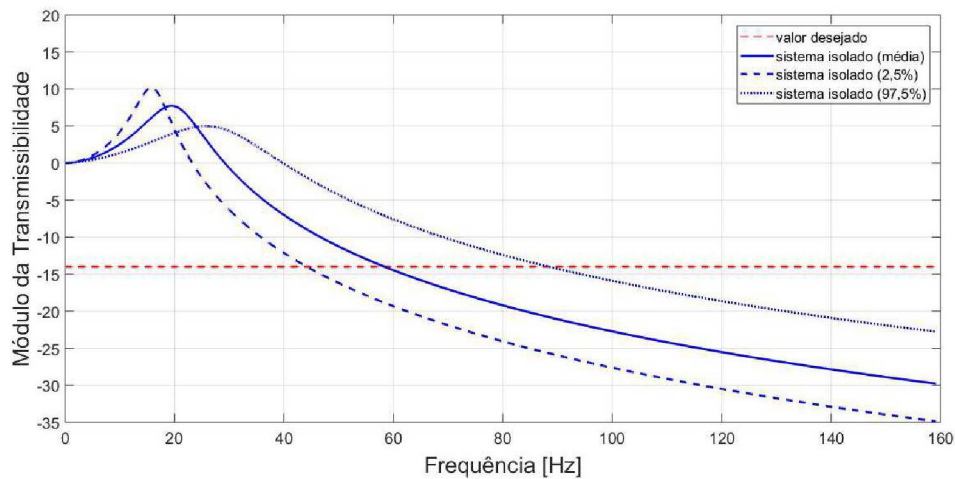


Figura 34: Aferição do desempenho - Isolamento - Parâmetros da média ($17, 4^{\circ}\text{C}$).



A ideia da aferição é, portanto, ilustrar que, se a variação das propriedades dinâmicas existe, então o sistema de isolamento deve ser tal que se possa ter um mecanismo de ajuste após a fabricação dos isoladores. Poder-se-ia pensar, por exemplo, que ao invés da utilização de quatro isoladores simples em paralelo, utilizar 4 conjuntos de dois isoladores em série, o que reduziria pela metade a rigidez do sistema. Outra alternativa de ajuste seria alterar a base do esmeril com a inserção de uma base metálica, aumentando assim a massa do sistema e diminuindo a frequência natural.

6.2 Resultados para o Projeto de Neutralização

De maneira análoga ao realizado na seção anterior, são apresentados nesta seção os resultados para o projeto de neutralização. No Apêndice D, é exposto o programa computacional desenvolvido para este caso de controle. Os parâmetros do material viscoelástico implementado para o neutralizador dinâmico são os mesmos já apresentados na Tabela 1.

6.2.1 Frequências Características e Fatores de Projeto

A Tabela 11, a Tabela 12 e a Tabela 13 apresentam os resultados da frequência característica (frequência ótima) e fator de projeto para o conjunto de parâmetros da média, do percentil de 2,5% e do percentil de 97,5%, respectivamente. Observa-se que os valores da frequência característica e do fator de projeto, para cada conjunto de parâmetros, continuaram mostrando significativa variação, como no caso do projeto de isolamento.

Tabela 11: Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $-2,1^{\circ}\text{C}$.

T = $-2,1^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
frequência característica [Hz]	39,23	40,66	36,95
fator de projeto [cm]	$1,46 \cdot 10^{-4}$	$2,60 \cdot 10^{-4}$	$7,17 \cdot 10^{-5}$

Tabela 12: Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $17,4^{\circ}\text{C}$.

T = $17,4^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
frequência característica [Hz]	40,91	42,03	38,39
fator de projeto [cm]	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-3}$	$5,32 \cdot 10^{-4}$

Tabela 13: Frequência característica e fator de projeto - Temperatura: $33,5^{\circ}\text{C}$.

T = $33,5^{\circ}\text{C}$	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
frequência característica [Hz]	42,82	43,19	41,93
fator de projeto [cm]	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$3,55 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-3}$

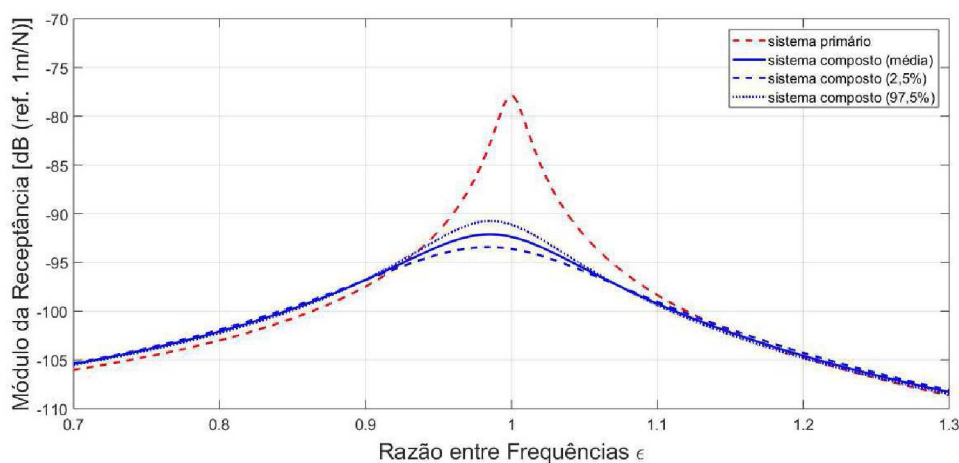
É possível observar que as frequências características ou estão próximas ou não estão muito distantes da frequência natural do sistema. Constatase também, para as frequências características, uma maior proximidade nos valores, quando comparados aos valores das frequências características do projeto de isolamento. Essa diferença se deve ao fato de que, na neutralização, a frequência de interesse do controle foi de 45 Hz, enquanto no isolamento foi de 58 Hz. Nota-se, nos gráficos da verificação preditiva, que a dispersão não é constante, alterando em função da temperatura e da frequência (as curvas mais baixas no gráfico ficam mais próximas, enquanto as mais altas se afastam progressivamente). Nos resultados para o fator de projeto, verificou-se, em comparação

com o sistema de isolamento, uma diminuição nos valores, já que a frequência de interesse na neutralização também foi menor do que a do caso do isolamento.

Na Figura 35, na Figura 36 e na Figura 37, mostra-se o módulo da receptância (FRF) para cada temperatura. A linha em vermelho refere-se ao comportamento do sistema primário, enquanto as demais dizem respeito ao sistema composto (sistema primário mais neutralizador). Essas mostram curvas mais atenuadas, consequência do controle de vibração realizado com o neutralizador dinâmico.

Na observação das FRFs do sistema composto, verificou-se pouca diferença entre as curvas de cada conjunto de parâmetros (média e percentis), exceto para as curvas na temperatura de 33,5°C, onde a diferença foi um tanto mais apreciável. Nessa temperatura, a diferença foi de aproximadamente 8 dB entre os percentis de 2,5% e 97,5%. Isso ocorre por conta da temperatura, pois a dispersão dos conjuntos de parâmetros não é igual para todas as frequências e temperaturas, como observado na seção 5.1. Aliás, na Figura 37, as FRFs apresentaram claramente dois picos, evidenciando que o sistema composto comporta-se como um sistema com dois graus de liberdade.

Figura 35: Módulo da receptância na temperatura de $-2,1^{\circ}\text{C}$.



Dessa forma, independente do conjunto de parâmetros utilizado no projeto de neutralização, percebeu-se a redução de vibração nas três temperaturas de trabalho. Isso pode ser vislumbrado nas curvas do módulo da receptância do sistema composto.

A próxima subseção relata os resultados obtidos para as dimensões do neutralizador dinâmico.

Figura 36: Módulo da receptância na temperatura de 17,4°C.

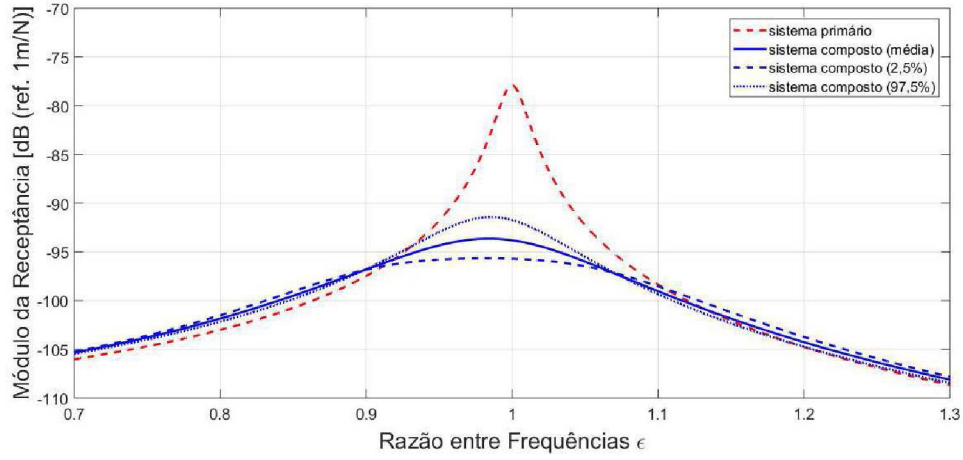
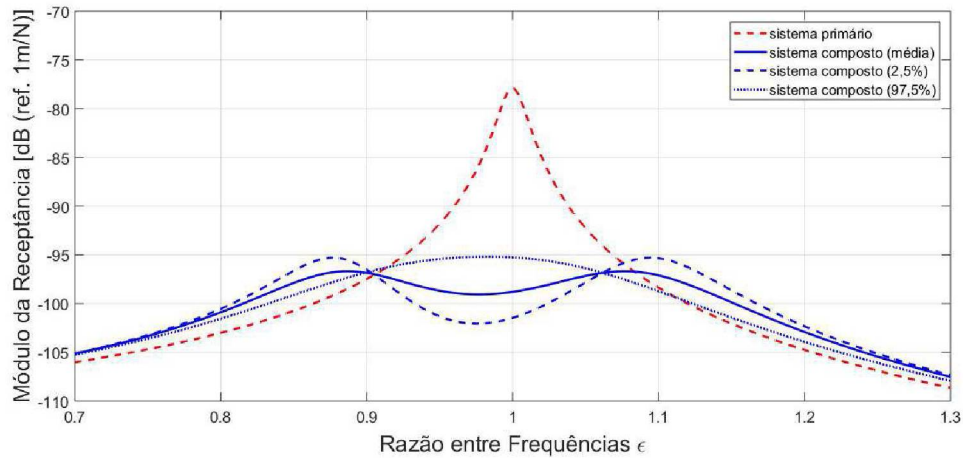


Figura 37: Módulo da receptância na temperatura de 33,5°C.



6.2.2 Dimensões do Elemento Resiliente do Neutralizador

O mesmo procedimento adotado para o cálculo das dimensões dos isoladores foi adotado para o cálculo das dimensões do elemento resiliente do neutralizador. Para cada conjunto de parâmetros, ou seja, média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%, e nas três temperaturas de trabalho, foi projetado um elemento resiliente e, portanto, um neutralizador. A Tabela 14, a Tabela 15 e a Tabela 16 mostram os resultados para a abordagem "Dimensões 1".

Tabela 14: Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: -2,1°C.

T = -2,1°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	69,11	38,93	141,05
diâmetro [cm]	1,14	1,14	1,14

Tabela 15: Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: 17,4°C.

T = 17,4°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	9,99	6,20	19,02
diâmetro [cm]	1,13	1,13	1,13

Tabela 16: Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: 33,5°C.

T = 33,5°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	4,04	2,85	6,23
diâmetro [cm]	1,13	1,13	1,13

Verificou-se, nesta abordagem, para as condições propostas de controle, que os resultados não foram compatíveis para o sistema em questão. Embora os valores dos diâmetros tenham apresentado certa compatibilidade, os valores de altura apresentaram resultados muito elevados. Constatou-se, durante as simulações, que os resultados para tal abordagem melhoravam significativamente quando a deflexão estática do sistema controlado ultrapassava 10% da altura. Entretanto, como já visto na subseção 3.1.3, 10% é o limite para que a relação carga-deflexão se mantenha na faixa linear.

Quando utilizada a abordagem "Dimensões 2" para o projeto do neutralizador, os resultados obtidos foram mais plausíveis. Isso pode ser visualizado na Tabela 17, na Tabela 18 e na Tabela 19.

Tabela 17: Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: -2,1°C.

T = -2,1°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	0,16	0,30	0,08
diâmetro [cm]	0,05	0,09	0,02

Tabela 18: Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: 17,4°C.

T = 17,4°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	1,17	1,89	0,61
diâmetro [cm]	0,39	0,62	0,62

Nessa segunda abordagem, já se pode perceber uma aproximação melhor das dimensões para o sistema do esmeril, embora algumas ainda não se mostrarem muito factíveis. O esboço dos elementos resilientes dos neutralizadores podem ser observados na

Tabela 19: Dimensões do elemento resiliente do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: 33,5°C.

T = 33,5°C	Média	Percentil 2,5%	Percentil 97,5%
altura [cm]	2,90	4,10	1,88
diâmetro [cm]	0,96	1,36	0,62

Figura 38, na Figura 39 e na Figura 40 para a abordagem "Dimensões 1", e na Figura 41, na Figura 42 e na Figura 43, para a abordagem "Dimensões 2".

Novamente, conforme foi observado para as dimensões dos isoladores, algumas das dimensões resultantes para o neutralizador não foram compatíveis com o esmeril. Entretanto, a variação nos valores da altura e do diâmetro apareceram, consequência da variabilidade das propriedades dinâmicas do material viscoelástico em frequência e temperatura.

Figura 38: Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: -2,1°C.

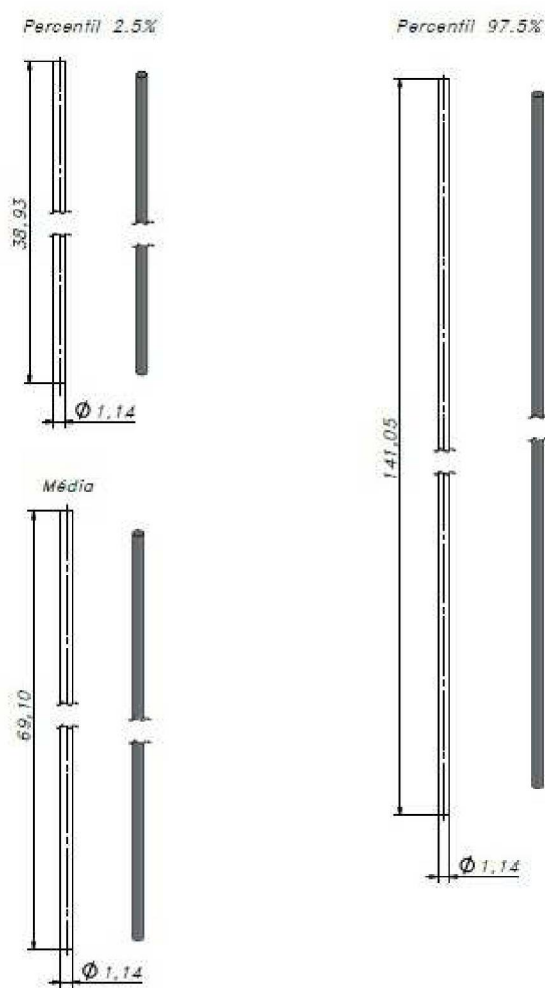


Figura 39: Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: 17,4°C.

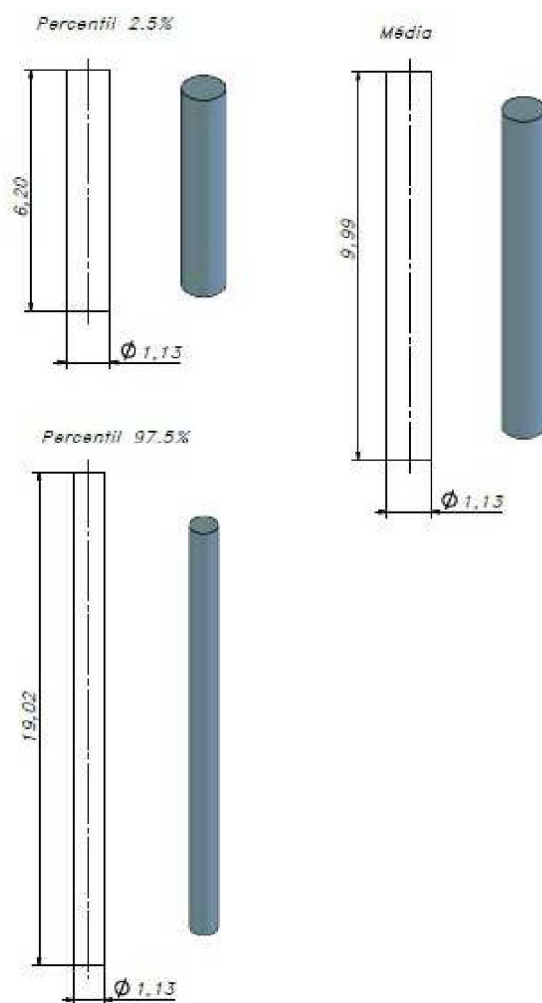


Figura 40: Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 1 - Temperatura: 33,5°C.

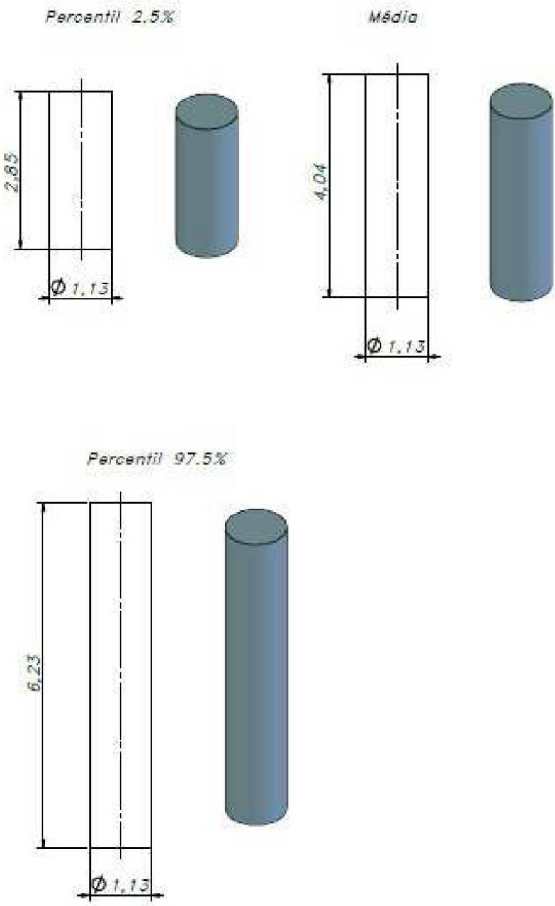


Figura 41: Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: -2,1°C.

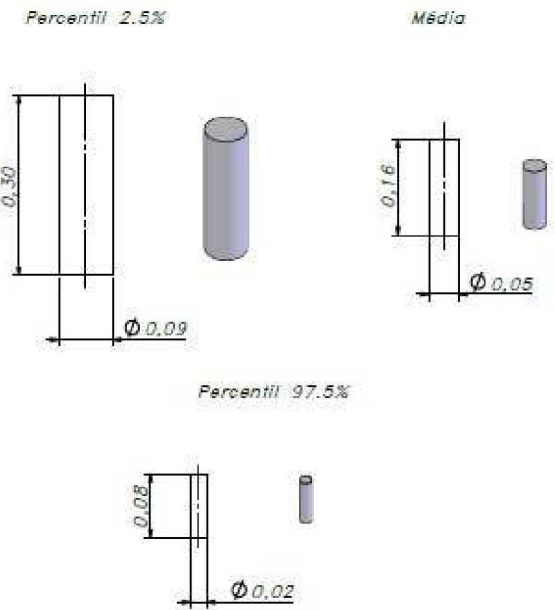


Figura 42: Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: 17,4°C.

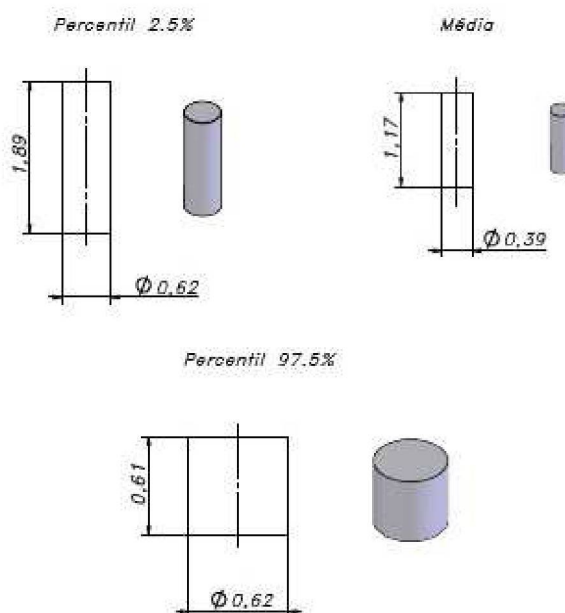
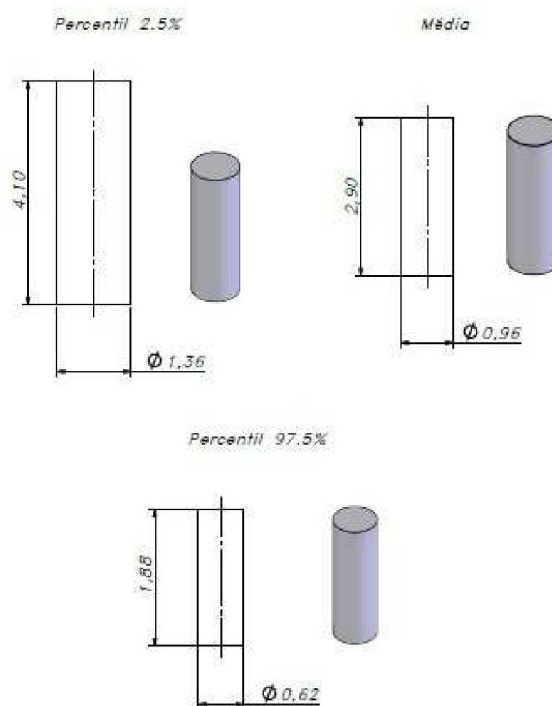


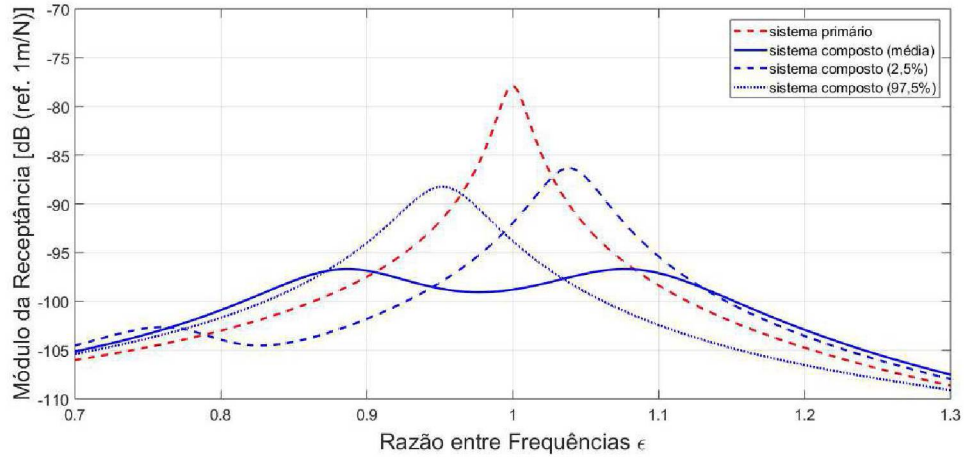
Figura 43: Esboço dos elementos resilientes do neutralizador - Abordagem: Dimensões 2 - Temperatura: 33,5°C.



6.2.3 Aferição do Desempenho - Projeto de Neutralização

Assim como no projeto de isolamento, foi realizada a aferição de desempenho para o projeto de neutralização. Novamente, optou-se pelo conjunto de parâmetros da média na temperatura de 33,5°C. O resultado pode ser observado na Figura 44.

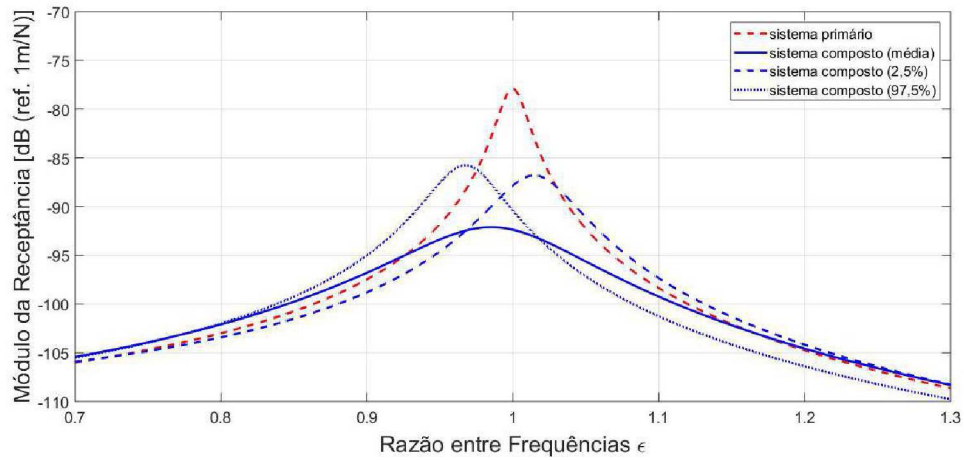
Figura 44: Aferição do desempenho - Neutralização - Parâmetros da média ($33,5^{\circ}\text{C}$).



Verifica-se que a redução de vibração para o conjunto de parâmetros da média é a mesma conforme previsto no projeto. Entretanto, para os conjuntos de parâmetros do percentil de 2,5% e do de 97,5% perde-se aproximadamente entre 6 dB e 10 dB de desempenho (quando a comparação é feita entre picos). Um mecanismo que se pode adotar após a fabricação deste dispositivo com um dos dois conjuntos de parâmetros é uma sintonização, ou seja, uma alteração da massa do neutralizador.

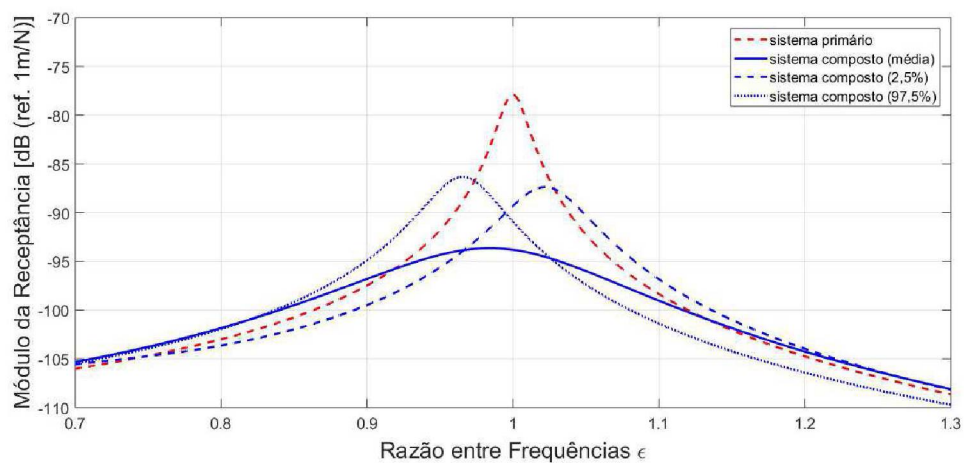
A aferição para as temperaturas de $-2,1^{\circ}\text{C}$ e $17,4^{\circ}\text{C}$ para os três conjuntos de parâmetros do material, é apresentada na Figura 45 e na Figura 46. Nesses casos, reduções entre 5 dB e 8 dB, aproximadamente, podem ser observadas.

Figura 45: Aferição do desempenho - Neutralização - Parâmetros da média ($-2,1^{\circ}\text{C}$).



A variação das propriedades dinâmicas do material, retratada via inferência bayesiana, permite o conhecimento prévio do desempenho do sistema composto conforme os

Figura 46: Aferição do desempenho - Neutralização - Parâmetros da média ($17,4^{\circ}\text{C}$).



gráficos de aferição apresentam. O fornecimento desse tipo de informação ainda não haveria sido constatado na literatura.

6.3 Análise Final

Com a finalidade de firmar o que foi apresentado ao longo do presente trabalho, expõe-se que um material viscoelástico caracterizado via inferência bayesiana pode ser convenientemente utilizado em um projeto de controle de vibrações mecânicas por um projetista. As incertezas nas propriedades dinâmicas do material podem ser quantificadas com a utilização de um método bayesiano, sendo propagadas posteriormente para os projetos de controle. Ou seja, as incertezas se propagam nas dimensões dos dispositivos resilientes pertinentes.

No projeto de isolamento, os três conjuntos de parâmetros obtidos probabilisticamente para o material, sejam eles, a média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5% conduziram, quando inseridos no projeto de isolamento, para cada temperatura de trabalho, a frequências características diferentes e, conseqüentemente fatores de projeto também diferentes. Com isso, os isoladores apresentaram valores distintos em suas dimensões, tanto para a altura quanto para o diâmetro. Foi claramente observada a grande variação nas dimensões em ampla faixa de frequência, mesmo para os dispositivos que apresentaram dimensões menos plausíveis para o controle do esmeril.

No projeto de neutralização, houve redução de vibração do sistema primário nas três temperaturas de trabalho, independentemente do conjunto de parâmetros adotado para o controle. Assim como para o projeto de isolamento, as dimensões do elemento resiliente do neutralizador, altura e diâmetro, apresentaram diferentes valores. Entretanto, observou-se que uma das abordagens não resultou dimensões compatíveis com o sistema primário adotado neste trabalho.

A aferição do desempenho realizada em ambos os projetos de controle permitiu o conhecimento da faixa na qual as propriedades dinâmicas do material podem variar. Com isso, pode-se prever um eventual mecanismo de ajuste após a fabricação do dispositivo de controle correspondente.

Notou-se que o projeto de isolamento mostrou resultados mais verossímeis com o sistema primário em questão, em relação ao projeto de neutralização. Entretanto, em ambos os projetos, a dispersão encontrada nas propriedades dinâmicas do material viscoelástico EAR ISODAMP C-1002 se propagou durante o andamento do projeto até se chegar aos cálculos das dimensões dos elementos resilientes.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1 Conclusões

O emprego proposto de um material viscoelástico caracterizado via inferência bayesiana em projetos de controle de vibrações mecânicas foi realizado com êxito e de maneira inédita. Foram efetuados dois projetos de controle em um sistema de um grau de liberdade: um projeto de isolamento e outro de neutralização. Em ambos os projetos, foram calculadas as dimensões dos elementos resilientes correspondentes.

A abordagem bayesiana de caracterização do material conjugou um modelo de derivada fracionária, de quatro parâmetros, com a equação de Arrhenius, de um parâmetro, nos programas computacionais escritos em R e JAGS. Os parâmetros adotados para os projetos de controle de vibrações foram estimados a partir de uma distribuições de probabilidade a posteriori. Foram escolhidos, assim, 2.000 conjuntos de valores dos parâmetros e, com essa amostra, após algumas análises e um ajuste para o módulo real de elasticidade, determinaram-se as estatísticas descritivas, média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%, para os cinco parâmetros do modelo.

No projeto de isolamento realizado, foram adotadas três temperaturas de trabalho, $-2,1^{\circ}\text{C}$, $17,4^{\circ}\text{C}$ e $33,5^{\circ}\text{C}$. Em cada temperatura, calculou-se o módulo da transmissibilidade complexa a partir do conjunto de parâmetros definidos para a média, percentil de 2,5% e percentil de 97,5%. Com isso, foram obtidos três valores distintos de fator de projeto em cada temperatura, sendo as dimensões dos isoladores, em consequência, também distintas. Foram disponibilizados, então, três opções de altura e diâmetro para a confecção dos dispositivos, dependendo da temperatura de trabalho.

Também foi realizado um projeto de neutralização. As temperaturas de trabalho e os conjuntos de parâmetros para o material foram os mesmos adotados no projeto de isolamento. Foram obtidas frequências ótimas distintas e fatores de projetos também distintos. Dessa forma, o projeto do neutralizador resultou em valores de altura e diâmetro distintos, tal como no caso anterior.

Verificou-se assim que, tanto no projeto de isolamento quanto no de neutralização, as dimensões do dispositivo apresentaram variação, embora algumas das dimensões obtidas não tenham sido razoáveis para a construção efetiva do dispositivo de controle. Dessa forma, conclui-se que, quando é utilizado um material viscoelástico caracterizado via inferência bayesiana em um projeto de controle de vibrações, a variabilidade encontrada nas propriedades dinâmicas desse material pode ser propagada até o estágio final de dimensionamento dos dispositivos de controle, conferindo uma perspectiva mais realista às predições associadas.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Neste trabalho foram gerados 100.002 conjuntos de parâmetros na caracterização do material viscoelástico via inferência bayesiana. Sugere-se pesquisar se haveria necessidade de gerar um valor tão elevado. Pode ser que com um menor número de conjuntos, já seja viável reproduzir as previsões aqui realizadas.
- Optou-se, como discutido no capítulo 5, por trabalhar apenas com o módulo real de elasticidade. Propõe-se investigar, em uma pesquisa futura, a contribuição do módulo imaginário. Supõe-se que, trabalhando-se com três materiais viscoelásticos distintos, quais sejam, neoprene, borracha butílica e o próprio EAR ISODAMP C-1002, será possível identificar qual a influência efetiva do módulo imaginário, posto que esses três materiais possuem distintos comportamentos quanto à dissipação de energia.
- Sugere-se utilizar a abordagem proposta no presente trabalho para investigar o desempenho de neutralizadores viscoelásticos com mais de um grau de liberdade, de modo a verificar os impactos correspondentes.

REFERÊNCIAS

- AHL'EM, A.; STERNAD, M. **Derivation and design of wiener filters using polynomial equations.** Control and Dynamic System. Vol. 64, pp. 353-418, 1994.
- AN, D.; KIM, N. H.; CHOI, J-H. **Practical options for selecting data-driven or physics-based prognostics algorithms with reviews.** Reliability Engineering and System Safety. Vol. 133, pp. 223-236, 2015.
- AQUINO, A. S de. **Controle de vibração de um sistema sob desbalanceamento rotativo utilizando atuador de liga com memória de forma.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - UFPB, 2011.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design.** San Diego, California, USA: Elsevier Academic Press, 2004.
- ATTAR, M.; KARRECH, A.; REGENAUER-LIEB, K. **A lattice spring model for dynamic analysis of damaged beam-type structures under moving loads.** European Journal of Mechanics - A/Solids. Vol. 60, pp. 196-207, 2016.
- AU, S-K.; NI, Y-C. **Fast bayesian modal identification of structures using known single-input forced vibration data.** Structural Control and Health Monitoring. Vol. 21, pp. 381-402, 2014.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **A Generalized Derivative Model for an Elastomeric Damper.** The Shock and Vibration Bulletin. Vol. 49 (2), pp. 135-143, 1979.
- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior.** Journal of Rheology. Vol. 30 (1), pp. 133-155, 1986.
- BALBINO, F. O. **Análise Estatística de Dados Experimentais na Caracterização Dinâmica de Materiais Viscoelásticos.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - UFPR, Curitiba, 2012.
- BALBINO, F. O. **Estimação de Propriedades Dinâmicas de Materiais Viscoelásticos utilizando Abordagem Bayesiana.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - UFPR, Curitiba, 2016.
- BARBOSA, F. S.; FARAGE, M. C. R. **A finite element model for sandwich viscoelastic beams: Experimental and numerical assessment.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 317, pp. 91-111, 2008.
- BARNETT, V. **Comparative Statistical Inference.** 3ª ed. John Wiley & Sons, 1999.

BAVASTRI, C. A. **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - UFSC, 1997.

BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. O; GONÇALVES, V. V.; FEBBO, M. **Optimum Viscoelastic Absorbers for Cubic Non-Linear Systems.** Journal of Vibration and Control. Vol. 20 (10), pp. 1464-1474, 2014.

BAZARAA, M. S.; SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming.** John Wiley & Sons, 1979.

BAYES, T.; PRICE, R. **An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances.** By the late Rev. Mr. Bayes, communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A.M.F.R.S. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. 53, pp. 370-418, 1763.

BELDICA, C. E.; HILTON, H. H. **Analytical and Computational Simulations of Experimental Determinations of Deterministic and Random Linear Viscoelastic Constitutive Relations.** 12th International Conference on Composite Materials, Paris, France, 1999.

BERGER, J. O.; WOLPERT, R. L. **The Likelihood Principle.** 2^a ed. Institute of Mathematical Statistics, 1988.

BILASSE, M.; DAYA, E. M.; AZRAR, L. **Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 329, pp. 4950-4969, 2010.

BROOKS, S. P.; GELMAN, A.; JONES, G. L.; MENG, X. L. **Handbook of Markov Chain Monte Carlo.** Chapman & Hall. Boston, 2011.

CASCIATI, F.; CIMELLARO, G. P.; DOMANESCHI, M. **Seismic reliability of a cable-stayed bridge retrofitted with hysteretic devices.** Computers & Structures Journal. Vol. 86, pp. 1-17, 2008.

CASELLA, G.; GEORGE, E. I. **Explaining the Gibbs Sampler.** The American Statistician. Vol. 46 (3), pp. 167-174, 1992.

CASTELLO, D. A.; ROCHINHA, F. A.; ROITMAN, N.; MAGLUTA, C. **Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables.** Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 22 (8), pp. 1840-1857, 2008.

CHEN, Z. H.; NI, Y. Q. **On-board identification and control performance verification of an MR damper incorporated with structure.** Journal of Intelligent Material Systems and Structures. Vol. 22, pp. 1551-1565, September, 2011.

CHEUNG, S. H.; BECK, J. L. **Bayesian model updating using hybrid Monte**

Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters. Journal of Engineering Mechanics. Vol. 135, pp. 243-255, 2009.

CHIB, S.; GREENBERG, E. **Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm.** The American Statistician. Vol. 49, (4), pp. 327-335, 1995.

CHUNG, L-L.; KAO, P-S.; YANG, C-H.; WU, L-Y.; CHEN, H-M. **Optimal frictional coefficient of structural isolation system.** Journal of Vibration and Control. Vol. 21 (3), pp. 525-538, 2013.

COX, D. R. **Some Problems Connected with Statistical Inference.** The Annals of Mathematical Statistics. Vol. 29, pp. 357-372, 1958.

CRUZ, G. A. M. **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos baseado no Modelo a Derivadas Fracionárias.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - UFSC, 2004.

DANDEKAR, D. P.; GREEN, J. L.; HANKIN, M.; MARTIN, A. G.; WEISGERBER, W.; SWANSON, R. A. **Deformation of Isodamp (A Polyvinyl Chloride-Based Elastomer) at Various Loading Rates.** Army Materials Technology Laboratory. Report No. MTL TR 91-16. U.S., MA, USA, 1991.

DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibrations.** New York: McGraw-Hill, 1956.

DOEBLING, S. W.; HEMEZ, F. M. **Overview of uncertainty assessment for structural health monitoring.** In: Proceedings of the 3rd International Workshop on Structural Health Monitoring. Stanford University, 2001.

E-A-R Speciality Composites. **Technical Data Sheet TDS-19- ISODAMP C-1000 Series Isolation Materials.** USA, 1996.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A. **Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers in a Frequency Band: A generalized approach.** In Proceedings of the Sixth International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, 06-10 March, Caxambu, Minas Gerais. Vol. 1, pp. 214-217, 1995.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. O. **Design of Optimum Systems of Viscoelastic Vibration Absorbers for a Given Material Based on the Fractional Calculus Model.** Journal of Vibration and Control. Vol. 14 (9-10), pp. 1607-1630, 2008.

ESPÍNDOLA, J. J.; BAVASTRI, C. A.; LOPES, E. M. O. **On the Passive Control of Vibrations with Viscoelastic Dynamic Absorbers of Ordinary and Pendulum Types.** Journal of the Franklin Institute. Vol. 347, pp. 102-115, 2010.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA, H. P. **Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A generalized approach.** IMAC 10 - 10th International Modal Analy-

sis Conference. Society for Experimental Mechanics, San Diego. Vol. 2, pp. 1367-1373, 1992.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O. **A Generalized Fractional Derivative Approach to Viscoelastic Material Properties Measurements.** Applied Mathematics and Computation, Vol. 164 (2), pp. 493-506, 2005a.

ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA NETO, J. M.; LOPES, E. M. O. **On the Fractional Parameter Identification of Viscoelastic Materials.** In Fractional Differentiation and its Applications, A. Le Mehaueté, J. A. Terneiro Machado, J. C. Trigeassou, e J. Sabatier, eds., Ubooks Verlag, Neusaess, Germany, pp. 327-340, 2005b.

FEBBO, M.; LOPES, E. M. O.; BAVASTRI, C. A. **Influence of temperature on optimum viscoelastic absorbers in cubic nonlinear systems.** Journal of Vibration and Control. Vol. 22 (15), pp. 3396-3412, 2016.

FERRY, J. D.; FITZGERALD, E. R.; GRANDINE JR., L. D.; WILLIAMS, M. L. **Temperature dependence of dynamic properties of elastomers: Relaxation distributions.** Industrial and Engineering Chemistry. Vol. 44, pp. 703-706, 1952.

FERRY, J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers.** 3^a ed. John Wiley & Sons, 1980.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introductin to Linear Viscoelasticity.** Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1976.

FRAHM, H. **Device for Damping Vibration of Bodies.** U.S. Patent n° 989959. October, 1909.

GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. **Markov Chain Monte Carlo.** 2^a ed. Chapman & Hall. Boca Raton, 2006.

GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. M. **Sampling-Based Aproaches to Calculating Marginal Densities.** Journal of the American Statistical Association. Vol. 85 (410), pp. 398-409, 1990.

GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S.; RUBIN, D. B. **Bayesian Data Analysis.** 2^a ed. Chapman & Hall, 2004.

GEMAN, S.; GEMAN, D. **Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images.** IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 6, pp. 721-741, 1984.

GENT, A. N. **Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components.** 2^a ed. Munich: Hanser, 2001.

GIERE, R. N. **Explaining Science: A Cognitive Approach.** Chicago. University of Chicago Press, 1988.

GILL, J. Bayesian Methods. **A Social and Behavioral Sciences Approach.** 2^a ed. New York. CRC Press. 2009.

GOGU, C.; HAFTKA, R.; RICHE, R. L.; MOLIMARD, J.; VAUTRIN, A. **Introduction to the Bayesian Approach Applied to Elastic Constants Identification.** AIAA Journal. Vol. 48 (5), pp. 893-903, 2010.

GREWAL, J. S.; SEDAGHATI, R.; ESMAILZADEH, E. **Vibration analysis and design optimization of sandwich beams with constrained viscoelastic core layer.** Journal of Sandwich Structures and Materials. Vol. 15 (2), pp. 203-228, 2013.

HASTINGS, W. K. **Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications.** Biometrika. Vol. 57 (1), pp. 97-109, 1970.

HERNANDEZ, W. P.; BORGES, F. C. L.; CASTELLO, D. A.; ROITMAN, N.; MANGLUTA, C. **Bayesian inference applied on model calibration of a fractional derivative viscoelastic model.** DINAME 2015 - Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. ABCM, Natal, RN, Brazil, February, pp. 22-27, 2015a.

HERNANDEZ, W. P.; CASTELLO, D. A.; RITTO, T. **Uncertainty propagation in sandwich beams with viscoelastic core.** DINAME 2015 - Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. ABCM, Natal, RN, Brazil, February, pp. 22-27, 2015b.

HIBBELER, R.C.. **Mechanics of Materials.** 7^a ed. Pearson Prentice Hall, 2008.

HILTON, H. H. **Optimum Viscoelastic Designer Materials for Minimizing Failure Probabilities during Composite Curing.** Journal of Thermal Stresses. Vol. 26, pp. 547-557, 2003.

HILTON, H. H.; HSU, J.; KIRBY, J. S. **Linear viscoelastic analysis with random material properties.** Probabilistic Engineering Mechanics. Vol. 6 (2), pp. 57-69, 1991.

HIMMELBLAU, D. M. **Applied Nonlinear Programming.** McGraw Hill Book Company, USA, 1972.

HUANG, D.; XU, W.; XIE, W.; LIU, W. **Responses and energy transmissibility of a viscoelastic isolation system with a power-form restoring force under delayed feedback control.** Journal of Vibration and Control. Vol. 23 (14), pp. 2291-2306, 2017.

HUANG, D.; XU, W. **Performance characteristics of a real-power viscoelastic isolation system under delayed PPF control and base excitation.** Nonlinear Dynamics. Vol. 88, pp. 2035-2050, 2017.

JACKMAN, S. **Bayesian Analysis for the Social Sciences.** 1^a ed. John Wiley

& Sons, 2009.

JACQUES, N.; DAYA, E. M.; POTIER-FERRY, M. **Nonlinear vibration of viscoelastic sandwich beams by the harmonic balance and finite element methods.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 329, pp. 4251-4265, 2010.

JARAMILLO, V. H.; OTTEWILL, J. R.; DUDEK, R.; LEPIAREZYK, D.; PAWLIK, P. **Condition monitoring of distributed systems using two-stage Bayesian inference data fusion.** Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 87, pp. 91-110, 2017.

JIANG, R.; YU, J.; MAKIS, V. **Optimal Bayesian estimation and control scheme for gear shaft fault detection.** Computers & Industrial Engineering. Vol. 63, pp. 754-762, 2012.

JONES, D. I. G. **On temperature-frequency analysis of polymer dynamic mechanical behavior.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 140, pp. 85-102, 1990.

JONES, D. I. G. **Results of a Round Robin Test Program: Complex Modulus Properties of a Polymeric Damping Material.** Final Report for Period Oct 1986-May 1992. WL-TR-92-3104, Wright Laboratory, Flight Dynamics Directorate, Structural Dynamics Branch, Wright-Patterson AFB, Ohio, USA, 1992.

KAIPPIO, J.; SOMERSALO, E. **Statistical and Computational Inverse Problems.** Springer. New York, 2005.

KASS, R. E.; WASSERMAN, L. **The Selection of Prior Distributions by Formal Rules.** Journal of the American Statistical Association. Vol. 91, pp. 1343-1370, 1996.

KATAFYGIOTIS, L. S.; YUEN, K. **Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data.** Earthquake Engineering and Structural Dynamics. Vol.30, pp. 1103-1123, 2001.

KERSCHEN, G.; GOLINVAL, J. C.; HEMEZ, F. M. **Bayesian model screening for the identification of nonlinear mechanical structures.** Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 125, pp. 389-397, 2003.

KIM, Y.; BAI, J-W. **Seismic fragility analysis of smart structures.** 5th World Conference on Structural Control and Monitoring. Shinjuku, July, 2010.

KIM, Y.; BAI, J-H.; ALBANO, L. D. **Fragility estimates of smart structures with sensor faults.** Smart Materials and Structures. Vol. 22, pp. 1-12, 2013.

KIM, Y.; CHONG, J. W.; CHON, K.; KIM, J. M. **Wavelet-based AR-SVM for health monitoring of smart structures.** Smart Materials and Structures. Vol. 22, 2012.

KITIS, L. **Vibration Reduction over a Frequency Range.** Journal of Sound and

Vibration. Vol. 89 (4) pp. 559-569, 1983.

KORAYEM, M. H.; SHAFEI, A. M. **Application of recursive Gibbs Appell formulation in deriving the equations of motion of N-viscoelastic robotic manipulators in 3D space using Timoshenko Beam Theory.** Acta Astronautica. Vol. 83, pp. 273-294, 2013.

KORAYEM, M. H.; SHAFEI, A. M. **A new approach for dynamic modeling of n-viscoelastic-link robotic manipulators mounted on a mobile base.** Nonlinear Dynamics. Vol. 79, pp. 2767-2786, 2015.

KPEKY, F.; BOUDAUD, H.; ABED-MERAIM, F.; DAYA, E. M. **Modeling of viscoelastic sandwich beams using solid-shell finite elements.** Composite Structures. Vol. 133, pp. 105-116, 2015.

KRUSCHKE, J. K. **Doing Bayesian Data Analysis: A tutorial with R, JAGS, and Stan.** 2^a ed. Elsevier, 2015.

LAKES, R.S. **Viscoelastic Solids.** CRC Press, 1999.

LAPLACE, P-S. **A Philosophical Essay on Probabilities.** Tradução da sexta edição. New York. Dover Publications, 1951.

LÁZARO, M.; PÉREZ-APARICIO, J. L.; EPSTEIN, M. **Computation of eigenvalues in proportionally damped viscoelastic structures based on the fixed-point iteration.** Applied Mathematics and Computation. Vol. 219, pp. 3511-3529, 2012.

LEWIS, T.; NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G. **Frequency temperatures dependence of polymer complex modulus properties.** Proceedings of the Damping 1989 Conference. West Palm Beach. Vol. 2 (4), February, 1989.

LIU, C.; JING, X.; CHEN, Z. **Band stop vibration suppression using a passive X-shape structured lever-type isolation system.** Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 68-69, pp. 342-353, 2016.

LOPES, E. M. O. **Um estudo da precisão do metodo da viga vibrante aplicado a determinação das propriedades dinamicas de elastomeros.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - UFSC, 1989.

LOPES, E. M. O. **On the Experimental Response Reanalysis of Structures with Elastomeric Materials.** Tese de Doutorado. University of Wales Cardiff, Cardiff, UK, 1998.

LOPEZ, I.; SARIGUL-KLIJN, N. **A review of uncertainty in flight vehicle structural damage monitoring, diagnosis and control: Challenges and opportunities.** Progress in Aerospace Sciences. Vol. 46, pp. 247-273, 2010.

LU, Z.; BRENNAN, M. J.; CHEN, L-Q. **On the transmissibilities of nonlinear**

vibration isolation system. Journal of Sound and Vibration. Vol. 375, pp. 28-37, 2016.

MARRA, J. C. O. **Controle Híbrido de Vibrações em Estruturas sob Excitação de Banda Larga, utilizando Neutralizador Viscoelástico e Filtro Adaptativo.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - UFSC, 2007.

MEDEIROS JUNIOR, W. B. **Caracterização Dinâmica de Elastômeros via Derivadas Fracionárias e Método GHM.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - UFPR, 2010.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A.H.; TELLER, E. **Equation of State Calculations by Fast Computing Machines.** The Journal of Chemical Physics. Vol. 21, pp. 1087-1092, 1953.

MIGON, H. S.; GAMERMAN, D.; LOUZADA, F. **Statistical Inference: An Integrated Approach.** 2^a ed. CRC Press, 2015.

NAGEL, J.; SUDRET, B. **Probabilistic inversion for estimating the variability of material properties: A Bayesian multilevel approach.** Proceedings of the 11th International Probabilistic Workshop. Brno, Czech Republic, 2013.

NASCIMENTO Jr, C. L.; YONEYAMA, T. **Inteligência Artificial em Automação e Controle.** São Paulo, 1997.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G. J.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping.** John Wiley and Sons, 1985.

OATES, W. S.; HAYS, M.; MILES, P.; SMITH, R. **Uncertainty quantification and stochastic-based viscoelastic modeling of finite deformation elastomers.** Electroactive polymer actuators and devices. Vol. 8687. DOI: 10.1117/12.2009706.2013, 2013.

O'HAGAN, A. **Kendall's Advanced Theory of Statistics.** Bayesian Inference. Vol. 2B, 1994.

OLIENICK FILHO, O. G.; LOPES, E. M. O.; BAVASTRI, C. A. **Integrated Dynamic Characterization of Thermorheologically Simple Viscoelastic Materials Accounting for Frequency, Temperature, and Preload Effects.** Materials. Vol. 12 (12), 2019.

ORTIZ, G. A.; ALVAREZ, D. A.; BEDOYA-RUÍZ, D. **Identification of Bouc-Wen type models using transitional Markov chain Monte Carlo method.** Computers and Structures. Vol. 146, pp. 252-269, 2015.

PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana.** Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa, 2003.

PLUMMER, M. **rjags: Bayesian Graphical Models Using MCMC.** R package

version 3-14. <<https://cran.r-project.org/web/packages/rjags/rjags.pdf>>, 2014.

POURHOSSEINI, M.; AZIMIRAD, V.; KAZEMI, M. **A new fast nonlinear modeling of soft tissue for surgical simulation.** Journal of Robotic Surgery. Vol. 8, pp. 141-148, 2014.

PRESS, J.S. **Subjective and Objective Bayesian Statistics: Principles, Models and Applications.** 2^a ed. John Wiley & Sons. New Jersey, 2003.

PRÉVE, C. T. **Identificação e Controle de um Sistema com um Grau de Liberdade Não Linear Cúbico Usando Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica - UFPR, Curitiba, 2015.

PRITZ, T. **Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 195 (1), pp. 103-115, 1996.

PRITZ, T. **Measurement Methods of Complex Poisson's Ratio of Viscoelastic Materials.** Applied Acoustics. Vol. 60, pp. 279-292, 2000.

PRITZ, T. **Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials.** Journal of Sound and Vibration. Vol. 265 (5), pp. 935-952, 2003.

RIBEIRO JR., P. J. **Inferência Estatística - Introdução à Inferência Bayesiana).** Disciplina do Bacharelado em Estatística, UFPR, 2018.

RIVIN, E. I. **Passive Vibration Isolation.** ASME Press. Professional Engineering Publishing, New York, 2003.

ROGERS, L. **Operators and Fractional Derivates for Viscoelastic Constitutive Equations.** Journal of Rheology, Vol. 27, pp. 351-372, 1983.

ROSSI, P. E.; ALLENBY, G. M.; MCCULLOCH, R. **Bayesian Statistics and Marketing.** John Wiley & Sons, 2005.

ROSSIKHIN, Y. A.; SHITIKOVA, V. **Application of Fractional Calculus for Analysis of Nonlinear Damped Vibrations of Suspension Bridges.** Journal of Engineering Mechanics. Vol. 124 (9), pp. 1029-1036, 1998.

SCHERBAKOV, M.; GURVICH, M. R. **Probabilistic Modeling of Hysteretic Behavior of Elastomers Under 3-D Cyclic Loading.** Journal of Elastomers and Plastics. Vol. 37 (2), pp. 123-147, 2005.

SHARIFI, R.; KIM, Y.; LANGARI, R. **Sensor fault detection of large smart civil structures.** ASME Dynamic Systems and Control Conference. Hollywood, CA, October, 2009.

SNOWDON, J. C. **Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems.** John Wiley & Sons, 1968.

SU, Y. S.; YAJIMA, M. **R2jags: A Package for Running jags from R.** R package version 05-7. <<https://cran.r-project.org/web/packages/R2jags/R2jags.pdf>>, 2015.

SZABO, J. P.; KEOUGH, I. A. **Method for Analysis of Dynamic Mechanical Thermal Analysis Data Using the Havriliak-Negami Model.** *Thermochimica Acta*. Vol. 1-12, pp. 392-393, 2002.

TANNER, M. A. **Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distribution and Likelihood Functions.** 3^a ed. Springer. Evanston, 2006.

TARNG, Y. S.; KAO, J. Y.; LEE, E. C. **Chatter suppression in turning operations with a tuned vibration absorber.** *Journal of Materials Processing Technology*. Vol. 105, pp. 55-60, 2000.

TENG, T.; HU, N. **Analysis of Damping Characteristics for Viscoelastic Laminated Beams.** *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*. Vol. 190, pp. 3881-3892, 2001.

TORVIK, P. J.; BAGLEY, R. L. **Fractional Derivatives in the Description of Damping Materials and Phenomena: The Role of Damping in Vibration and Noise Control.** In *Proceedings of the Eleventh Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Boston, MA. September, pp. 125-135, 1987.

TSCHOEGL, N. W. **The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior.** Springer-Verlag, 1989.

ZHANG, E.; CHAZOT, J.; ANTONI, J.; HAMDI, M. **Bayesian characterization of Young's modulus of viscoelastic materials in laminated structures.** *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 332 (16), pp. 3654-3666, 2013.

ZHOU, K.; LIANG, G.; TANG, J. **Vibration analysis of structure with uncertainty using two-level Gaussian processes and Bayesian inference.** *Journal of Physics: Conference Series*, pp. 1-8, 2016.

WILLIAMS, M. L.; LANDEL, R. F.; FERRY, J. D. **The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and others glass-forming liquids.** *Journal of the American Chemical Society*. Vol. 77, pp. 3701-3707, 1955.

WORDEN, K.; HENSMAN, J. **Parameter estimation and model selection for a class of hysteretic systems using Bayesian inference.** *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 32, pp. 153-69, 2012.

ANEXO A - Programa Computacional do Modelo Bayesiano

```
# Carregando os pacotes e funcoes
require(rjags)
require(ggplot2)
require(gridExtra)
require(plyr)
require(reshape)
require(reshape2)
source('DBDA2E-adapted.R')

#-----
# STEP 1 - Inferencia Bayesiana para dos dados reais
#-----

# Modelo Bayesiano (Modelo utiliza a equação para o valor absoluto, pois o JAGS não trabalha com
# números imaginários).
modelo = "modelo _ bayesiano _ Arrhenius _ TESTE.txt"
modelstring = "
model{
  for( r in 1 : Ndata ) {
    y1[r] ~ dnorm(logRe[r],1/(sigma2Real))
    y2[r] ~ dnorm(logIm[r],1/(sigma2Imag))
    y3[r] ~ dnorm(mu[r],1/sigma2)
    alphas[r] <- -10 * ((TA/Tp[r])-(TA/273))
    omegaBeta[r] <- -(alphas[r]*2*3.141593*om[r])^beta
    Re[r] <- (((Eh*(b*omegaBeta[r])^ 2+(Eh+El)*cos(beta*3.141593/2)*b*(omegaBeta[r]
+El))/((b*omegaBeta[r])^ 2+2*cos(beta*3.141593/2)*b*omegaBeta[r]+1))
    Im[r] <- (((Eh*sin(beta*3.141593/2)*b*(omegaBeta[r]))/((b*omegaBeta[r])^ 2+
2*cos(beta*3.141593/2)*b*omegaBeta[r]+1))-((El)*sin(beta*3.141593/2)*
b*(omegaBeta[r]))/((b*omegaBeta[r])^ 2+2*cos(beta*3.141593/2)*b*omegaBeta[r]+1))
    logRe[r] <- log(Re[r])
    logIm[r] <- log(Im[r])
    mu[r] <- log(sqrt(Re[r]^2+Im[r]^ 2))
  }
}

# Determinação das priors para cada parâmetro
sigma2Real dgamma(1,1)
sigma2Imag dgamma(1,1)
sigma2 dgamma(1,1)
TA dnorm(8000,1/1000000)
El dnorm(5,1/1000000)T(0,10)
Eh dnorm(2395,1/1000000)
b dlnorm(0.004,1/1000000)
beta dnorm(0.4,1/1000000)T(0,1)
}
"

# Close quote for modelstring
writeLines(modelstring,con="modelo _ bayesiano _ Arrhenius _ TESTE.txt")

# Lendo os dados
Dados<-read.csv('dados _ experimento.csv')

# Salvando os dados
dataMat<-Dados
```

```

# Extrair o número de observações
Ndata = NROW(dataMat)

# Média dos dados
meanMat <- ddply(dataMat,.(Freq,Temp),summarise,module.mean=
  mean(module),mimaginario.mean=mean(mimaginario))

# Extract data info:
Nmean = NROW(meanMat)

# Data List
# Specify data, as a list.
dataList = list(Ndata = Ndata ,
  om = dataMat$Freq,
  Tp = dataMat$Temp,y1=log(dataMat$module),
  y2=log(dataMat$mimaginario),
  y3=log(sqrt(dataMat$mimaginario^2+dataMat$module^2)))

#-----
# INITIALIZE THE CHAINS (Inicia as cadeias conforme os valores iniciais que foram determinados)
TA=8000;El= 5;Eh = 2395;b = 0.004;beta = 0.4;sigma2= 1;sigma2Real=1;
sigma2Imag=1
initsList = list( TA = TA, El = El, Eh = Eh, b = b, beta = beta,
  sigma2 = sigma2,sigma2Real = sigma2Real, sigma2Imag = sigma2Imag)

#-----
# RUN THE CHAINS (Gera efetivamente as cadeias)
parameters = c("TA", "El","Eh","b","beta",
  "sigma2","sigma2Real","sigma2Imag")
adaptSteps = 100 # Number of steps to "tune"the samplers.
burnInSteps = 1000 # Number of steps to "burn-in"the samplers.
nChains = 3 # Number of chains to run.
numSavedSteps=100000 # Total number of steps in chains to save.
thinSteps=1 # Number of steps to "thin"(1=keep every step).
nPerChain = ceiling((numSavedSteps * thinSteps)/nChains) # Steps per chain.

# Create, initialize, and adapt the model:
jagsModel = jags.model("modelo _ bayesiano _ Arrhenius _ TESTE.txt",
  data=dataList , inits=initsList , n.chains=nChains , n.adapt=adaptSteps)

# Burn-in:
cat( "Burning in the MCMC chain... n")
update( jagsModel , n.iter=burnInSteps )

# The saved MCMC chain:
cat( "Sampling final MCMC chain... n")
codaSamples = coda.samples( jagsModel , variable.names=parameters ,n.iter=
  nPerChain , thin=thinSteps )

# Salvando os parâmetros
Parametros = as.matrix( codaSamples )
npar = dim(Parametros)[1]

# Distribuições a Posteriori
Parametros.amostra = Parametros[,c("TA", "El","Eh","b","beta")]
write.table(Parametros.amostra,file='meusparametros.txt',row.names = F)
save(Dados,dataList,Parametros,codaSamples,file='codasamples _

```

```

Arrhenius _ TESTE.Rda')

#-----
# FIM Step 1
#-----

# Lendo os dados para fazer a analise
load('codasamples _ Arrhenius _ TESTE.Rda')

#-----
# Plot Posteriori para os Parametros da Reamostragem
#-----

pdf('figs/plotPost _ TA.pdf')
plotPost.PT(Parametros['TA'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ El.pdf')
plotPost.PT(Parametros['El'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ Eh.pdf')
plotPost.PT(Parametros['Eh'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ b.pdf')
plotPost.PT(Parametros['b'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ beta.pdf')
plotPost.PT(Parametros['beta'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ sigma2.pdf')
plotPost.PT(Parametros['sigma2'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ sigma2Real.pdf')
plotPost.PT(Parametros['sigma2Real'], cenTend='mean')
dev.off()

pdf('figs/plotPost _ sigma2Imag.pdf')
plotPost.PT(Parametros['sigma2Imag'], cenTend='mean')
dev.off()

#-----

# Distribuicoes a Posteriori
TA = (Parametros['TA'])
El = (Parametros['El'])
Eh = (Parametros['Eh'])
b = (Parametros['b'])
beta = Parametros['beta']
sigma2 = (Parametros['sigma2'])
sigma2Real = (Parametros['sigma2Real'])
sigma2Imag = (Parametros['sigma2Imag'])

# Histogramas no mesmo grafico

```

```

pdf('figs/histograma _ real.pdf',width=15,height=8)
par(mfrow = c(3,2))
hist(Eh , main = 'Posteriori de Eh')
hist(El , main = 'Posteriori de El')
hist(b, main = 'Posteriori de b')
hist(beta, main = 'Posteriori de beta')
hist(TA, main = 'Posteriori de TA')
dev.off()

diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='El',saveName='figs/diagEL _ arrhenius' ,
saveType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='Eh',saveName='figs/diagEh _ arrhenius' ,
saveType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='b',saveName='figs/diagb _ arrhenius' , sa-
veType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='beta',saveName='figs/diagbeta _ arrhe-
nius' , saveType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='TA',saveName='figs/diagTA _ arrhenius'
, saveType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='sigma2',saveName='figs/diagsigma2 _ ar-
rhenius' , saveType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='sigma2Real',saveName='figs/diagsigma2Real
_ arrhenius' , saveType="jpg")
diagMCMC(codaObject = codaSamples , parName='sigma2Imag',saveName='figs/diagsigma2Imag
_ arrhenius' , saveType="jpg")
graphics.off()

#-----
# Posterior Predictive Check
#-----

# Exemplo para uma observacao
sample.Param = Parametros[,c('TA','El','Eh','b','beta','sigma2','sigma2Real','sigma2Imag')]

# Uma funcao para prever o modulo real a partir da frequencia, temperatura e parametros viscoelasticos
predModulo<-function(om,Tp,param)
param = as.vector(param)
TA = param[1]
El = param[2]
Eh = param[3]
b = param[4]
beta = param[5]
sigma2 = param[6]
sigma2Real = param[7]
sigma2Imag = param[8]
alphan<-10 ^ ((TA/Tp)-(TA/273))
omegaBeta<-(alphan*2*3.141593*om) ^ beta
Real<-((Eh*(b*omegaBeta) ^ 2+(Eh+El)*cos(beta*3.141593/2)*b*(omegaBeta)+El)
/((b*omegaBeta) ^ 2+2*cos(beta*3.141593/2)*b*omegaBeta+1))
Imag<-(((Eh)*sin(beta*3.141593/2)*b*(omegaBeta))/((b*omegaBeta) ^ 2+2*cos(beta*
3.141593/2)*b*omegaBeta+1)-((El)*sin(beta*3.141593/2)*b*(omegaBeta))/((b*omegaBeta) ^ 2+2*
cos(beta*3.141593/2)*b*omegaBeta+1))
mu<-log(sqrt(Real ^ 2+Imag ^ 2))

# tetaE
tetaE = atan(Imag/Real)

# Variancia do log da soma quadratica dos dos modulos real e imaginario

```

```

sigma<-sqrt(sigma2)

# Valor predito para o log da soma quadratica dos modulos real e imaginario
ruídoS<-rnorm(1,0,sigma)
y.pred<-mu+ruídoS

# Valor predito para o modulo real
real.pred <- log(Real)+rnorm(1,0,sqrt(sigma2Real))

# Valor predito para o modulo imaginario
imag.pred <- log(Imag)+rnorm(1,0,sqrt(sigma2Imag))
return(list(y.pred = y.pred, mu = mu,
real.pred = real.pred, mu.real = Real,
imag.pred = imag.pred, mu.imag = Imag,
ruídoS = ruídoS,
om=om,Tp=Tp)
)
}

# Uma funcao para previsao da soma, modulos real e imaginario.
matrizPred<-function(idx,jdx)
mpred = unlist(predModulo(om=dataList$om[idx],Tp=dataList$Tp[idx],param=
sample.Param[jdx,]))
return(mpred=mpred)
}

# Esta parte do codigo simula os modulos com base em amostras dos parametros da distribuicao a
posteriori
IDX = 1:dataList$Ndata
JDX = sample(1:dim(Parametros)[1],2000)
INDx = expand.grid(IDX,JDX)
Mx<-t(mapply(matrizPred,INDx[,1],INDx[,2]))
Mx<-as.data.frame(Mx)

# Criacao de arquivos com o resumo das simulacoes a partir de amostras da posteriori
Soma.Mx<-ddply(Mx,.(om,Tp),summarize,mean.pred=mean(y.pred),q025.pred=
quantile(y.pred,0.025),q975.pred=quantile(y.pred,0.975))
Real.Mx<-ddply(Mx,.(om,Tp),summarize,mean.pred=mean(real.pred),q025.pred=
quantile(real.pred,0.025),q975.pred=quantile(real.pred,0.975))
Imag.Mx<-ddply(Mx,.(om,Tp),summarize,mean.pred=mean(imag.pred),q025.pred=
quantile(imag.pred,0.025),q975.pred=quantile(imag.pred,0.975))

# Resumindo os dados para a soma
Data.obs=cbind.data.frame(Y=dataList$y3,Tp=dataList$Tp,om=dataList$om)
Soma.OB<-ddply(Data.obs,.(om,Tp),summarize,mean.obs=mean(Y))
Soma.Summary.Pred=merge(Data.obs,Soma.Mx,key=c('om','Tp'))
Soma.Summary.Pred=merge(Soma.Summary.Pred,Soma.OB,key=c('om','Tp'))

# Resumindo os dados para o modulo real
Data.obs=cbind.data.frame(Y=dataList$y1,Tp=dataList$Tp,om=dataList$om)
Soma.OB<-ddply(Data.obs,.(om,Tp),summarize,mean.obs=mean(Y))
Real.Summary.Pred=merge(Data.obs,Real.Mx,key=c('om','Tp'))
Real.Summary.Pred=merge(Real.Summary.Pred,Soma.OB,key=c('om','Tp'))

# Resumindo os dados para o modulo imaginario
Data.obs=cbind.data.frame(Y=dataList$y2,Tp=dataList$Tp,om=dataList$om)
Soma.OB<-ddply(Data.obs,.(om,Tp),summarize,mean.obs=mean(Y))
Imag.Summary.Pred=merge(Data.obs,Imag.Mx,key=c('om','Tp'))

```

```

Imag.Summary.Pred=merge(Imag.Summary.Pred,Soma.OB,key=c('om','Tp'))
myData=cbind.data.frame(Temperatura=dataList$Tp,Frequencia=dataList$om,
Real=dataList$y1,Imag=dataList$y2)
myData$Frequencia<-mapvalues(myData$Frequencia,from=c(0.1,0.2,0.5,1,2,5,10,20,50,100),
to=c(rep('0.1-0.5',3),rep('1-5',3),10,20,rep('50-100',2)))
gx<-ggplot(myData,aes(x=Real,y=Imag))+
  geom _ point(aes(colour=factor(Temperatura), shape = factor(Frequencia)))
ggsave(gx,filename = 'figs/ModuloReal _ vs _ ModuloImaginario _ Temperatura _
Frequencia.pdf',width=8,height = 6)

# Grafico dos desvios
pdf('figs/ModuloReal _ vs _ ModuloImaginario.pdf')
plot(dataList$y1,dataList$y2,
xlab = 'Módulo real (log)',
ylab = 'Módulo Imaginario (log)',
main = 'Módulos Real e Imaginário Observados')
dev.off()

# Grafico dos desvios
pdf('figs/Observado _ vs _ Predito _ Soma.pdf')
plot(Soma.Summary.Pred$mean.obs,Soma.Summary.Pred$mean.pred,
xlab = 'Observados (log)',
ylab = 'Preditos (log)',
main = 'Módulo Real')
abline(a=0,b=1,col='red')
dev.off()

# Grafico dos desvios
pdf('figs/Observado _ vs _ Predito _ Real.pdf')
plot(Real.Summary.Pred$mean.obs,Real.Summary.Pred$mean.pred,
xlab = 'Observados (log)',
ylab = 'Preditos (log)',
main = 'Módulo Real')
abline(a=0,b=1,col='red')
dev.off()

# Grafico dos desvios
pdf('figs/Observado _ vs _ Predito _ Imaginario.pdf')
plot(Imag.Summary.Pred$mean.obs,Imag.Summary.Pred$mean.pred,
xlab = 'Observados (log)',
ylab = 'Preditos (log)',
main = 'Módulo Imaginario')
abline(a=0,b=1,col='red')
dev.off()

# Grafico por temperaturas
doTemperatureLog<-function(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=273,typeData='Real')
# cria o arquivo para o grafico
sp<-subset(Summ.data,Tp==tp,select=c('Y','mean.pred','om','q025.pred','q975.pred','mean.obs'))
sp.rs<-melt(sp,id='om')
sp.rs$variable<-mapvalues(sp.rs$variable,from=c('Y','mean.pred','q025.pred','q975.pred',
'mean.obs'),to=c('Observado','Predito','Q025 Predito','Q975 Predito','Media Observado')
)
sp.rs<-sp.rs[!duplicated(sp.rs),]
if(typeData=='Real')ylab = 'Modulo Real (log)'
else if(typeData=='Imag')
ylab = 'Modulo Imaginario (log)'else if(typeData=='Soma')
ylab = 'Soma (log)'

```

```

# Produz o grafico
gx<-ggplot(data=sp.rs,aes(x=om,y=value,colour=variable))+
  guides(colour=FALSE)+
  geom _ point()+
  geom _ line(data=sp.rs[sp.rs$variable!='Observado'],aes(linetype=variable))+
  scale _ linetype _ manual(values = c(2,3,3,1))+
  scale _ color _ manual(values=c('blue','black','black','black','red'))+
  scale _ x _ log10()+
  # scale _ y _ log10()+
  labs(x='Freq. (log)', y = ylab , title = paste('Temperatura ',tp,sep=''))+
  theme _ bw()

fn = paste0('figs / modulo _ ',paste(typeData,tp,sep=' _ '),'.pdf')
ggsave(gx,file=fn,width=7,height=4.8)
}

# Fazendo o grafico para cada temperatura
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=233,typeData = 'Real')
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=253,typeData = 'Real')
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=263,typeData = 'Real')
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=273,typeData = 'Real')
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=283,typeData = 'Real')
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=293,typeData = 'Real')
doTemperatureLog(Summ.data=Real.Summary.Pred,tp=323,typeData = 'Real')

doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=233,typeData = 'Imag')
doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=253,typeData = 'Imag')
doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=263,typeData = 'Imag')
doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=273,typeData = 'Imag')
doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=283,typeData = 'Imag')
doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=293,typeData = 'Imag')
doTemperatureLog(Summ.data=Imag.Summary.Pred,tp=323,typeData = 'Imag')

doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=233,typeData = 'Soma')
doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=253,typeData = 'Soma')
doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=263,typeData = 'Soma')
doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=273,typeData = 'Soma')
doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=283,typeData = 'Soma')
doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=293,typeData = 'Soma')
doTemperatureLog(Summ.data=Soma.Summary.Pred,tp=323,typeData = 'Soma')

write.table(sample.Param[JDX,],file='amostra.txt',row.names = F) # txt da amostra de 2000
parâmetros

#-----
# FIM!
#-----

```


APÊNDICE A - Módulos Reais Simulados e Ajustados

São apresentados neste apêndice, nas Figuras 47, 48 e 49, os gráficos correspondentes aos resultados dos ajustes realizados com os valores simulados dos módulos reais. Tais gráficos dizem respeito, respectivamente, aos valores da média, do percentil de 2,5% e do percentil de 97,5%.

Figura 47: Ajuste do Módulo Real para os Valores da Média.

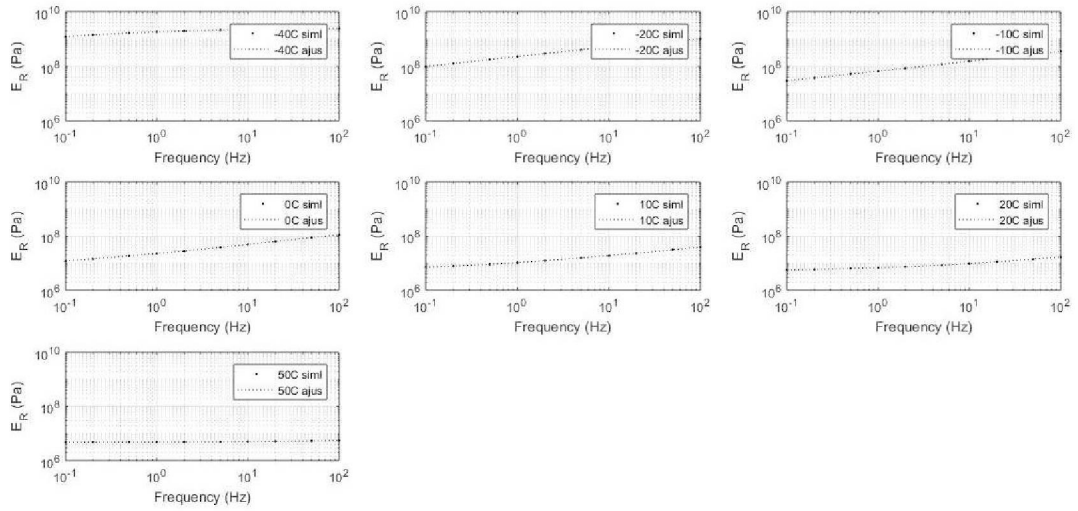


Figura 48: Ajuste do Módulo Real para os Valores do Percentil de 2,5%.

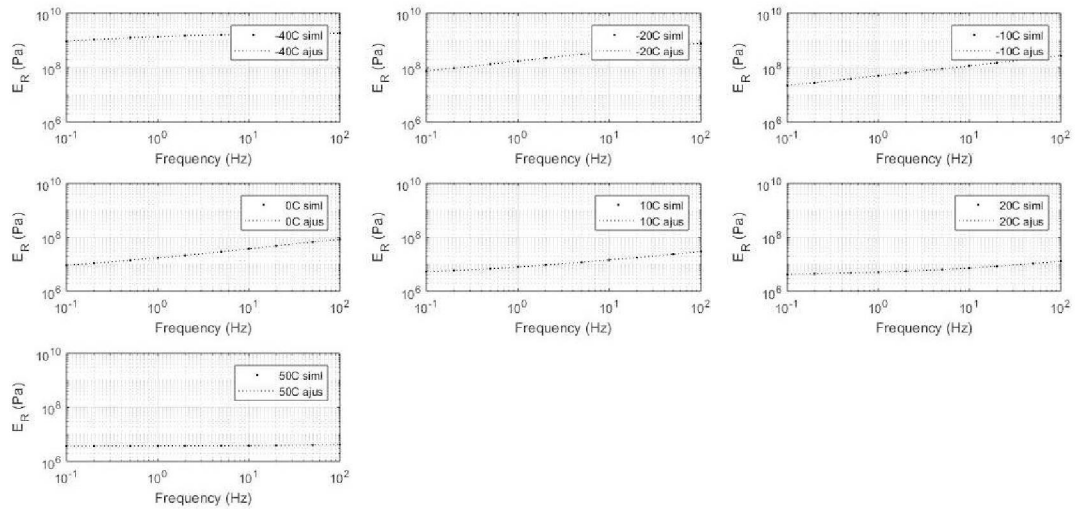
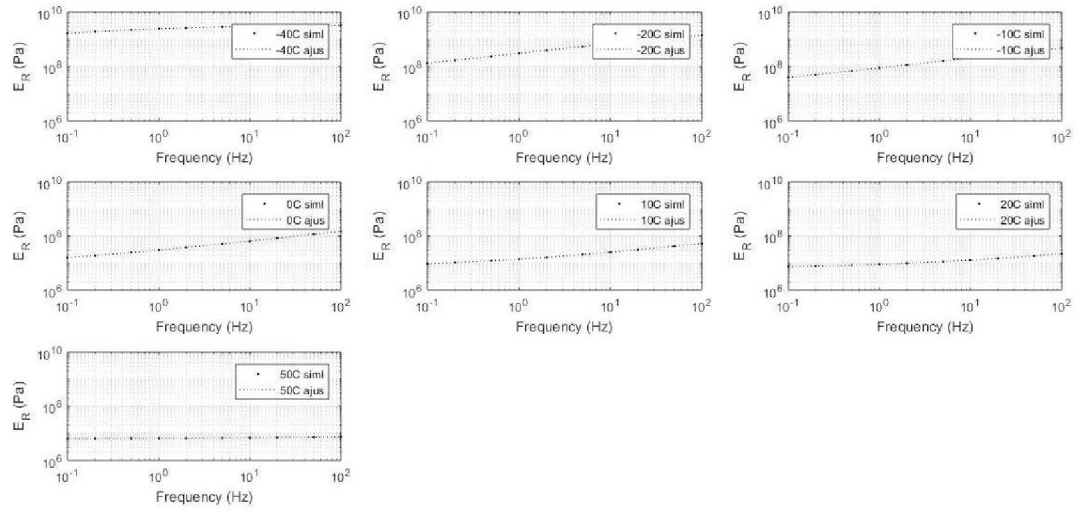


Figura 49: Ajuste do Módulo Real para os Valores do Percentil de 97,5%.



APÊNDICE B - Programa Computacional para o Projeto de Isolamento

```
%-----  
% Projeto com Isoladores de EAR C-1002  
%-----  
  
clc  
clearvars  
close all  
  
% Dados do problema  
m=4.9; % Massa do sistema(kg)  
fe=3500/60; % Frequência de excitação (Hz)  
ome=2*pi*fe; % Frequência de excitação (rad/s)  
Tdes=0.2; % Módulo da transmissibilidade desejada  
  
% Faixa de frequência  
om=logspace(0,3,2000);  
  
Primeira parte - Projeto do dispositivo  
  
% Temperatura de trabalho (K)  
T=[-2.1 17.4 33.5]+273; % ordenamento da menor para maior  
nt=length(T); % número de temperaturas  
  
% Parâmetros do modelo de derivada fracionária - EAR  
  
np=3; % Número de conjuntos de parâmetros  
sf='arr'; % Tipo de equação de fator de deslocamento  
switch lower(sf)  
case 'arr'  
parametros=xlsread('ParFD _ com.xlsx');  
E0=parametros(:,1); % (Pa)  
EI=parametros(:,2); % (Pa)  
b=parametros(:,3);  
beta=parametros(:,4);  
TA=parametros(:,5); % (K)  
T0=ones(5000,1)*(273); % (K)  
otherwise  
disp('Fator de deslocamento desconhecido.')end  
  
% Estimativa inicial para frequência característica  
omci=100;  
  
for it=1:nt  
for ic=1:np  
% atribuição de parâmetros materiais  
switch lower(sf)  
case 'arr'  
paux=[E0(ic) EI(ic) beta(ic) b(ic) T0(ic) TA(ic)];  
otherwise  
disp('Fator de deslocamento desconhecido.')end  
  
% Resolução de equação não linear
```

```

omcf=fzero(@(omco) eqnl(omco,paux,ome,T(it),sf,Tdes),omci);

% Atribuição de frequência característica
omc(ic,it)=omcf;

% Determinação do fator de projeto
Eb _ omc(ic,it)=ebarra _ var(paux,omc(ic,it),T(it),sf);
E _ omc(ic,it)=real(Eb _ omc(ic,it));
eta _ omc(ic,it)=imag(Eb _ omc(ic,it))/E _ omc(ic,it);
fp(ic,it)=omc(ic,it) ^ 2*m/E _ omc(ic,it);

% Cômputo de módulo da transmissibilidade
Tmod(ic,:)=trcomp _ var(paux,om,T(it),sf,omc(ic,it));

% Visualização da transmissibilidade
hold on
switch ic
case 1
h2=plot(om/(2*pi),20*log10(Tmod),'b-');
case 2
h3=plot(om/(2*pi),20*log10(Tmod),'b-');
case 3
h4=plot(om/(2*pi),20*log10(Tmod),'b-');
otherwise
disp('Conjunto de parâmetros desconhecido.')
end
hold off
pause(1)
end
legend([h1(1),h2(1),h3(1),h4(1)],...
'valor desejado','sistema isolado (média)',...
'sistema isolado (2,5%)','sistema isolado (97,5%)')

% Visualização das frequências características e fatores de projeto
disp(['Na temperatura T = ',num2str(T(it)),' K,'])
disp(' ')
disp('as frequências características, em rad / s, são as seguintes:')
disp(' ')
disp([num2str(omc(:,it))',' .'])
disp(' ')
disp('Já os fatores de projeto são os seguintes:')
disp(' ')
disp([num2str(fp(:,it))',' .'])
disp(' ')

% Alteração de estimativa inicial para freq. característica
omci=min(omc(:,it));

end

% Salva os fatores de projeto em .txt
dlmwrite('fator de projeto.txt',fp,'delimiter',' ','newline','pc')

Segunda parte - Aferição do desempenho

for it=1:nt
% Visualização da transmissibilidade desejada
figure(it+nt)

```

```

h1=plot(om/(2*pi),20*log10(Tdesv),'r-');
axis([0 160 -35 20])
xlabel('Frequência [Hz]')
ylabel('Módulo da Transmissibilidade')
%title('Controle de vibração por isolador viscoelástico')
grid on
pause(1)
for ic=1:np

% Atribuição de parâmetros materiais
paux=[E0(ic) EI(ic) beta(ic) b(ic) T0(ic) TA(ic)];

% Determinação de frequência característica (eq. não linear)
omci=omc(ic,it);
fp _ def=fp(1,it); % uso de fator de projeto de conjunto "médio"
omcf=fzero(@(omco) eqnl2(omco,paux,T(it),sf,fp _ def,m),omci);

% Cômputo de módulo da transmissibilidade
Tmod=trcomp _ var(paux,om,T(it),sf,omcf);

% Visualização da transmissibilidade do sistema isolado
hold on
switch ic
case 1
h2=plot(om/(2*pi),20*log10(Tmod),'b-');
case 2
h3=plot(om/(2*pi),20*log10(Tmod),'b-');
case 3
h4=plot(om/(2*pi),20*log10(Tmod),'b-');
otherwise
disp('Conjunto de parâmetros desconhecido.')
end
hold off
pause(1)
end
legend([h1(1),h2(1),h3(1),h4(1)],...
'valor desejado','sistema isolado (média)',...
'sistema isolado (2,5%)','sistema isolado (97,5%)')
end

%-----
% FIM
%-----

```

APÊNDICE C - Programa Computacional para o Cálculo das Dimensões dos Dispositivos Cilíndricos

- ABORDAGEM: "DIMENSÕES 1"

```
%-----  
% Cálculo da altura, considerando a deflexão estática do sistema isolado  
% igual a 10% da altura (h).  
%-----  
clc  
clearvars  
close all  
  
m=4.9;    % Massa do sistema  
g=9.8;    % Aceleração da gravidade  
E0=4.746555e6;    % Módulo de elasticidade estático  
nf=3;    % Número de fatores de projeto  
beta=1.5;    % Constante adimensional para elastômeros  
  
solucao=zeros(nf,1);  
fatordeprojeto=dlmread('fator de projeto.txt');  
fp1=fatordeprojeto(:,1);  
fp2=fatordeprojeto(:,2);  
fp3=fatordeprojeto(:,3);  
  
for j=1:nf  
  
    % Para T1=270.9 K  
    h1(j)=m*g/(0.1*fp1(j)*E0);  
  
    C4(j)=pi*beta;  
    C3(j)=0;  
    C2(j)=16*pi*h1(j)^ 2;  
    C1(j)=0;  
    C0(j)=-64*fp1(j)*h1(j)^ 3;  
  
    d1(j,:)=[C4(j) C3(j) C2(j) C1(j) C0(j)];  
    sol1=roots(d1(j,:));  
  
    for n=1:length(sol1)  
        if abs(imag(sol1(n)))==0 && real(sol1(n))>0    % Eliminando as soluções imaginárias e negativas  
            solucao1(j)=real(sol1(n));  
        end  
    end  
  
    % Para T2=290.4 K  
    h2(j)=m*g/(0.1*fp2(j)*E0);
```

```

C4(j)=pi*beta;
C3(j)=0;
C2(j)=16*pi*h2(j)^ 2;
C1(j)=0;
C0(j)=-64*fp2(j)*h2(j)^ 3;

d2(j,:)= [C4(j) C3(j) C2(j) C1(j) C0(j)];
sol2=roots(d2(j,:));

for n=1:length(sol2)
if abs(imag(sol2(n)))==0 && real(sol2(n))>0 % Eliminando as soluções imaginárias e negativas
solucao2(j)=real(sol2(n));
end
end

% Para T3=306.5 K
h3(j)=m*g/(0.1*fp3(j)*E0);

C4(j)=pi*beta;
C3(j)=0;
C2(j)=16*pi*h3(j)^ 2;
C1(j)=0;
C0(j)=-64*fp3(j)*h3(j)^ 3;

d3(j,:)= [C4(j) C3(j) C2(j) C1(j) C0(j)];
sol3=roots(d3(j,:));

for n=1:length(sol3)
if abs(imag(sol3(n)))==0 && real(sol3(n))>0 % Eliminando as soluções imaginárias e negativas
solucao3(j)=real(sol3(n));
end
end

end

% Visualização das temperaturas e fatores de alturas respectivas
disp('As alturas, em m, para a temperatura de 270.9 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(h1),' '])
disp(' ')
disp('Os diâmetros, em m, para a temperatura de 270.9 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(solucao1),' '])
disp(' ')
disp('As alturas, em m, para a temperatura de 290.4 K são:')
disp(' ')

```

```

disp([num2str(h2),' '])
disp(' ')
disp('Os diâmetros, em m, para a temperatura de 290.4 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(solucao2),' '])
disp(' ')
disp('As alturas, em m, para a temperatura de 306.5 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(h3),' '])
disp(' ')
disp('Os diâmetros, em m, para a temperatura de 306.5 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(solucao3),' '])
disp(' ')

%-----
% FIM
%-----

```

• ABORDAGEM: "DIMENSÕES 2"

```

%-----
% Cálculo da altura, considerando um valor arbitrário entre d e h, onde
%  $d/h < 10$ .
%-----

clc
clearvars
close all

nf=3; % Número de fatores de projeto

beta=1.5; % Constante adimensional para elastômeros
a1=0.09; % d/h (Razão de espectro)
a2=0.62; % d/h (Razão de espectro)
a3=1.48; % d/h (Razão de espectro)

fatordeprojeto=dlmread('fator de projeto.txt');

for j=1:nf
% Para T1=270.9 K
fp1=fatordeprojeto(:,1);
d1(j)=64*fp1(j)/(pi*a1*(beta*a1 ^ 2+16));
h1(j)=d1(j)/a1;

% Para T1=290.4 K

```



```

fp2=fatordeprojeto(:,2);
d2(j)=64*fp2(j)/(pi*a2*(beta*a2^ 2+16));
h2(j)=d2(j)/a2;

% Para T1=306.5 K
fp3=fatordeprojeto(:,3);
d3(j)=64*fp3(j)/(pi*a3*(beta*a3^ 2+16));
h3(j)=d3(j)/a3;
end

disp('As alturas, em m, para a temperatura de 270.9 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(h1),' '])
disp(' ')
disp('Os diâmetros, em m, para a temperatura de 270.9 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(d1),' '])
disp(' ')
disp('As alturas, em m, para a temperatura de 290.4 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(h2),' '])
disp(' ')
disp('Os diâmetros, em m, para a temperatura de 290.4 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(d2),' '])
disp(' ')
disp('As alturas, em m, para a temperatura de 306.5 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(h3),' '])
disp(' ')
disp('Os diâmetros, em m, para a temperatura de 306.5 K são:')
disp(' ')
disp([num2str(d3),' '])
disp(' ')

```

```

%-----
% FIM
%-----

```

APÊNDICE D - Programa Computacional para o Projeto de Neutralização

```
%
%-----
% Projeto com Neutralizadores de EAR C-1002
%-----
clc
clearvars
close all
% Variáveis globais
global m1 k1 c1 m2 om paux Taux sf Eb Hc

% dados do sistema primário
m1=4.9; % Massa (kg)
fnp=45; % Frequência natural do sistema primário (Hz)
omnp=2*pi*fnp; % Frequência natural do sistema primário (rad/s)
k1=m1*omnp^2; % Constante de rigidez (N/m)
ksi1=0.01; % Razão de amortecimento
c1=ksi1*2*m1*omnp; % Coeficiente de amortecimento (kg/s)

% Massa do neutralizador
mu=0.05; % Razão entre massas
m2=mu*m1; % Massa do neutralizador

% Banda de frequência para controle
omi=2*pi*30; % Frequência inicial
omf=2*pi*60; % Frequência final
om=omi:0.25:omf; % Vetor de frequências

% Determinação da receptância do sistema primário
eps=om/omnp; % Razão entre frequência e frequência natural do sistema primário
Hp=1./(-(om.^2)*m1+k1+...
    1i*2*m1*ksi1*omnp*om); % Receptância do sistema primário

% Primeira parte - Projeto do dispositivo

% Temperaturas de trabalho (K)
T=[-2.1 17.4 33.5]+273; % Ordenamento da menor para maior
nt=length(T); % Número de temperaturas

% Parâmetros do modelo de derivada fracionária - EAR
np=3; % Número de conjuntos de parâmetros
sf='arr'; % Tipo de equação de fator de deslocamento
switch lower(sf)
case 'arr'
    parametros=xlsread('ParFD _ com.xlsx');
    E0=parametros(:,1); % (Pa)
    EI=parametros(:,2); % (Pa)
    b=parametros(:,3);
    beta=parametros(:,4);
    TA=parametros(:,5); % (K)
    T0=ones(5000,1)*(273); % (K)
otherwise
    disp('Fator de deslocamento desconhecido.')
end

% Estimativa inicial para frequência característica do ndv
```

```

omci=280;

for it=1:nt
    Taux=T(it);
    % Visualização da receptância do sistema primário
    figure(it)
    plot(eps,20*log10(abs(Hp)), 'r-')
    axis([0.7 1.3 -110 -70])
    xlabel('Razão entre Frequências  $\epsilon$ ')
    ylabel('Módulo da Receptância [dB (ref. 1m/N)]')
    grid on
    pause(1)
    for ic=1:np
        % Atribuição de parâmetros materiais
        switch lower(sf)
            case 'arr'
                paux=[E0(ic) EI(ic) beta(ic) b(ic) T0(ic) TA(ic)];
            otherwise
                disp('Fator de deslocamento desconhecido.')
            end
        for im=1:length(om)
            % determinação de propriedades dinâmicas
            Eb(im)=ebarra_ var(paux,om(im),T(it),sf); % Módulo complexo
        end

        % Otimização não linear
        omcf=fminsearch('fobj _ ndv',omci);

        % Atribuição de frequência característica
        omc(ic,it)=omcf;

        % Determinação do fator de projeto
        Eb_omc(ic,it)=ebarra_ var(paux,omc(ic,it),T(it),sf);
        E_omc(ic,it)=real(Eb_omc(ic,it));
        eta_omc(ic,it)=imag(Eb_omc(ic,it))/E_omc(ic,it);
        fp(ic,it)=omc(ic,it)^2*m2/E_omc(ic,it);

        % Visualização da receptância do sistema composto
        hold on
        switch ic
            case 1
                plot(eps,20*log10(abs(Hc)), 'b-')
            case 2
                plot(eps,20*log10(abs(Hc)), 'b-')
            case 3
                plot(eps,20*log10(abs(Hc)), 'b-')
            otherwise
                disp('Conjunto de parâmetros desconhecido.')
            end
        hold off
        pause(1)
    end
    legend('sistema primário','sistema composto (média)',...
        'sistema composto (2,5%)','sistema composto (97,5%)')

    % Visualização das frequências características e fatores de projeto
    disp(['Na temperatura T = ',num2str(T(it)), ' K,'])
    disp(' ')

```

```

disp('as frequências características, em rad/s, são as seguintes:')
disp(' ')
disp([num2str(omc(:,it))',' .'])
disp(' ')
disp('Já os fatores de projeto são os seguintes:')
disp(' ')
disp([num2str(fp(:,it))',' .'])
disp(' ')

% Alteração de estimativa inicial para frequência característica
omci=max(omc(:,it));
end
% salva os fatores de projeto em .txt
% fpa=fp'; % Arranjo em linha por temperatura, para média, 2,5% e 97,5%
dlmwrite('fator de projeto _ n.txt',fp,'delimiter',' ','newline','pc')

% Segunda parte - Aferição de desempenho
for it=1:nt

% Visualização da receptância do sistema primário
figure(it+nt)
plot(eps,20*log10(abs(Hp)),'r-')
axis([0.7 1.3 -110 -70])
xlabel('Razão entre Frequências  $\epsilon$ ')
ylabel('Módulo da Receptância [dB (ref. 1m/N)]')
% title('Controle de vibração por neutralizador viscoelástico')
grid on
pause(1)

% Visualização da receptância do sistema composto
for ic=1:np
% atribuição de parâmetros materiais
paux=[E0(ic) EI(ic) beta(ic) b(ic) T0(ic) TA(ic)];

% Determinação de propriedades dinâmicas
for im=1:length(om)
Eb(im)=ebarra_var(paux,om(im),T(it),sf); % módulo complexo
end

% Determinação de frequência característica (eq. não linear)
omci=omc(ic,it);
fp_def=fp(1,it); % uso de fator de projeto de conjunto "médio"
omcf=fzero(@(omco) eqn12(omco,paux,T(it),sf,fp_def,m2),omci);

% Determinação da receptância do sistema composto
% grandezas preliminares
Eb _ omc=ebarra_var(paux,omcf,T(it),sf);
ra=real(Eb)/real(Eb _ omc);
eta=imag(Eb)./real(Eb);
epsa=om/omcf;

% Parâmetros generalizados equivalentes: rigidez
kr _ eq=(m2*ra*omcf.^2.*(epsa.^2-ra.*(1+eta.^2)).*epsa.^2)./(...
((epsa.^2-ra).^2+(ra.*eta).^2);
ki _ eq=(m2*ra*omcf.^2.*eta.*epsa.^4)./((epsa.^2-ra).^2+(ra.*eta).^2);

% Receptância do sistema composto
Hca=1./(-om.^2*m1+k1+kr _ eq+1i*(om*c1+ki _ eq));

```

```

% visualização
hold on
switch ic
case 1
plot(eps,20*log10(abs(Hca)), 'b-')
case 2
plot(eps,20*log10(abs(Hca)), 'b-')
case 3
plot(eps,20*log10(abs(Hca)), 'b:')
otherwise
disp('Conjunto de parâmetros desconhecido.')
end
hold off
pause(1)
end
legend('sistema primário','sistema composto (média)',...
'sistema composto (2,5%)','sistema composto (97,5%)')
end

%-----
% Função objetivo
%-----
function f=fobj_ ndv(omc_ est)
% Função objetivo para otimização do neutralizador viscoelástico

global m1 k1 c1 m2 om paux Taux sf Eb Hc

% Determinação do módulo complexo em omna
omna=omc_ est; % Frequência característica do ndv
Eb_ oma=ebarra_ var(paux,omna,Taux,sf); % Módulo complexo em omna

% Determinação da nova receptância do sistema primário
for im=1:length(om)
ra=real(Eb(im))/real(Eb_ oma);
eta=imag(Eb(im))/real(Eb(im));
epsa=om(im)/omna;

% Parâmetros generalizados equivalentes: rigidez
kr_ eq=(m2*ra*omna^2*(epsa^2-ra*(1+eta^2))*epsa^2)/((epsa^2-ra)^2+(ra*eta)^2);
ki_ eq=(m2*ra*omna^2*eta*epsa^4)/((epsa^2-ra)^2+(ra*eta)^2);
Hca(im)=1./(-om(im)^2*m1+k1+kr_ eq+1i*(om(im)*c1+ki_ eq));
end

% Cômputo do valor da função objetivo
Hc=Hca;
f=max(abs(Hc));
%-----
% FIM
%-----

```